231

BULLETIN
DE
L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

SÉRIE DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES

Volume VIII Numéro 1

VARSOVIE 1960

Le Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences est publié en Séries.

La présente Série comprend des communications du domaine de la mathématique, astronomie et physique

Lesdites sciences sont du domaine de la Troisième Classe de l'Académie Polonaise des Sciences.

La présente Série paraît mensuellement.

Les communications destinées à être publiées dans le Bulletin sont présentées à la Rédaction du Bulletin par les membres de l'Académie.

Adresse de la Rédaction: Pałac Kultury i Nauki, Varsovie

BULLETIN
DE
L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Rédacteur en chef
K. KURATOWSKI

Rédacteur en chef suppléant
L. INFELD

SÉRIE DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES

Rédacteur de la Série
A. MOSTOWSKI

Comité de Rédaction de la Série
K. BORSUK, W. IWANOWSKA, A. JABŁOŃSKI, W. RUBINOWICZ

VOLUME VIII
NUMERO 1

VARSOVIE 1960

PRINTED IN POLAND

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE, W-WA. MIODOWA 10

Nakład 1013+152 egz.	*Rękopis dostarczono 30.XI.1959*
Ark. wyd. 4,75 ark. druk. 5,125	*Podpisano do druku 22.II.1960*
Papier druk. sat. 80 g kl. III	*Druk ukończono w lutym 1960*
Format B5, 70×100 cm	*Zam. prod. 480/59 Cena zł 20.—*

WARSZAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA, W-WA, ŚNIADECKICH 8

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys.—Vol. VIII, No. 1, 1960

MATHEMATICS

The Complete Direct Sums of Torsion-free Abelian Groups of Rank 1 which Are Separable

by

M. KRÓL and E. SĄSIADA

Presented by K. KURATOWSKI on October 3, 1959

A torsion-free Abelian group G is said to be separable, if every finite subset of G is contained in a completely decomposable direct summand of finite rank of G.

It is known [1] that the complete direct sums of infinite cyclic groups are separable. On the other hand, there exist examples of complete direct sums of groups of rank 1, which are not separable.

Hence, there arises the question (Problem 25 proposed by L. Fuchs [2])

(P) *which complete direct sums of torsion-free Abelian groups of rank* 1 *are separable?*

The purpose of this paper is to give a full answer to this question. We characterize the separable complete direct sums of torsion-free groups of rank 1 by their invariants (i.e. by the types of their components and powers of sets of components of the same type).

Let $G = \sum_{t \in T}^{*} R_t$ be the complete direct sum of groups $R_t (t \in T)$ of rank 1, $\Omega(G)$ the set of all different types $\tau(R_t)$ of components $R_t (t \in T)$ and $T_{\mathfrak{a}} (\mathfrak{a} \in \Omega(G))$ the subset of T of all these $t \in T$ such that $\tau(R_t) = \mathfrak{a}$. The sets $\Omega(G)$ and $T_{\mathfrak{a}}(G) (\mathfrak{a} \in \Omega(G))$ are the invariants of the group G. Let $\Omega_{(0,\infty)}(G)$ be the subset of $\Omega(G)$ consisting of all such types which are determined by characteristics with elements 0 and ∞ only, and $\Omega_{*}(G) = \Omega(G) \setminus \Omega_{(0,\infty)}(G)$.

THEOREM. *Let* $G = \sum_{t \in T}^{*} R_t$ *be the complete direct sum of groups* $R_t (t \in T)$ *of rank* 1. *Then the group* G *is separable if and only if the invariants* $\Omega(G)$ *and* $T_{\mathfrak{a}}(G) (\mathfrak{a} \in \Omega(G))$ *satisfy the following two conditions:*

(1) *for every subset* $\Omega' \subset \Omega(G)$ *and every choice of characteristics* $\chi_a \in a\,(a \in \Omega')$ *there exists a finite subset* $\Omega'' \subset \Omega'$ *such that* $\bigcap_{a \in \Omega'} \chi_a = \bigcap_{a \in \Omega''} \chi_a$;

(2) *for every* $a \in \Omega_*(G)$ *the set* $T_a(G)$ *is finite.*

The proof of this theorem will be published in Acta Sc. Math. Szeged.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, NICHOLAS COPERNICUS UNIVERSITY, TORUŃ
(ZAKŁAD MATEMATYKI, UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA, TORUŃ)
INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY, PAN)

REFERENCES

[1] R. Baer, *Abelian groups without elements of finite order.* Duke Math. Journ. 3 (1957), 68—122.

[2] L. Fuchs, *Abelian groups,* Budapest, 1958.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys.—Vol. VIII, No. 1, 1960

MATHEMATIK

Bemerkungen über das Spektrum und Eigenfunktionen (links) invarianter Differentialoperatoren auf Lieschen Gruppen

von

K. MAURIN

Vorgelegt von A. MOSTOWSKI am 23 Oktober 1959

In seiner Dissertation [4] bewies Hörmander die Diskretheit des Spektrums einer weiten Klasse der partiellen Differentialoperatoren P mit konstanten Koeffizienten, indem er die Vollstetigkeit des Operators P_0^{-1}, wo P_0 der s.g. minimale Operator (P_0 ist die Abschliessung von $P = P(\partial/\partial x_1, ..., \partial/\partial x_M)$, $D(P) = C_0^\infty(\Omega)$), Ω — beschränkt ist, gezeigt hatte. Eine entscheidende Rolle spielt im Beweise des Hörmanderschen Satzes — wie übrigens in der ganzen Theorie der Operatoren mit konstanten Koeffizienten — die Fourier-Transformation. Im Falle der veränderlichen Koeffizienten ist analoger Satz im allgemeinen nicht gültig.

Da Polynome $P = P(Y_1, ..., Y_N)$ von linksinvarianten Lieschen Operatoren Y_k auf einer Lieschen Gruppe G viele Eigenschaften der Operatoren mit konstanten Koeffizienten besitzen, lag es nahe die Diskretheit des Spektrums für solche Operatoren auf prekompakten Mengen zu vermuten. Der Beweis muss selbstredend ganz anders verlaufen. Die Idee ist die folgende: man konstruiert einen beschränkten, mit $P(Y_1, ..., Y_N)$ vertauschbaren, hermitischen Operator B, der auf kompakten Untermengen von G vollstetig ist.

Auf diese Weise kann man nicht nur das Spektrum, sondern auch die Struktur der Eigenfunktionen von P untersuchen. Da B^k ($k = [N/4]+1$) Carlemansch ist, folgt aus einem vor kurzem bewiesenen Satz des Verfassers [8] die schwache Beschränktheit der Eigenfunktionen von P auf der ganzen Gruppe G. Da B^{-1} elliptisch mit analytischen Koeffizienten ist, sind fast alle (in Bezug auf ein Mass) Eigenfunktionen analytisch.

Der Operator B wurde von L. Gårding in einem anderem Zusammenhang in einer wichtigen noch nicht publizierten Abhandlung ausgewertet [2].

1. Konstruktion des Operators B

Es sei $G = \{x, y, z, \ldots\}$ eine zusammenhängende (separable) Liesche Gruppe und g ihre Liesche Algebra. Jedem $X \in g$ ist ein Differentialoperator folgendermassen zugeordnet

$$(Xf)(x) = \lim_{t \to 0} t^{-1} (f(x \exp tX) - f(x)).$$

Diese Operatoren sind linksinvariant, d. h.

$$L_y X = X L_y, \quad \text{wo} \quad (L_y f)(x) = f(y^{-1} x). \tag{1}$$

Jetzt konstruieren wir folgenderweise nach L. Gårding einen beschränkten, hermitischen, linksinvarianten Operator B in $H_0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Es sei $H_1(\Omega)$ die Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset G$ in dem Skalarprodukt

$$(f, g)_1 = (f, g)_0 + \sum_{k=1}^{N} (X_k f, X_k g)_1, \tag{2}$$

wo $(f, g)_0 = \int_G f(x)\, g(x)\, dx$ und $X_1, \ldots, X_N$ eine Basis von g ist.

Die Identität

$$(f, h)_0 = (B_\Omega f, h)_1, \quad f \in L^2(\Omega); \quad h, B_\Omega h \in H_1(\Omega) \tag{3}$$

definiert eine beschränkte Abbildung B_Ω

$$H_0(\Omega) \ni f \to B_\Omega f \in H_1(\Omega).$$

Es gilt das folgende

LEMMA 1 (Gårding [2]). *Die Abbildung $B = B_G$ ist hermitisch, beschränkt, d. h.*

$$B = B^*, \tag{4}$$

und linksinvariant, d.h.

$$BL_y = L_y B. \tag{5}$$

Beweis. ad (4): klar; ad (5): da alle X_k linksinvariant sind und L_y sowohl in $H_0(G)$ als auch in $H_1(G)$ unitär sind

$$(L_y f, L_y h)_1 = (L_y f, L_y h)_0 + \sum_k (X_k L_y f, X_k L_y h)_0 =$$

$$= (f, h)_0 + \sum_k (L_y X_k f, L_y X_k h)_0 = (f, h)_1,$$

haben wir

$$(L_y Bf, h)_1 = (Bf, L_y h)_1 = (f, L_y h)_0 = (L_y f, h)_0 = (BL_y f, h)_1$$

identisch für $f \in L^2(G)$, $h \in H_1(G)$. Die Operatoren L_y und B sind also vertauschbar.

2. Vertauschbarkeit von B und $P(Y_1, ..., Y_N)$.

Es sei $\mathfrak{G}$ der Gårdingsche Raum der unitären Darstellung L_y von $\mathfrak{G}$, d. h.

$$\mathfrak{G} = \left\{ L_\varphi u = \int_G \varphi(y) L_y u dy = \varphi * u, \ u \in H_0(G), \ \varphi \in C_0^\infty(G) \right\}.$$

Wir können jetzt das Hauptergebnis dieser Note beweisen: es gilt der

SATZ 1. *Es sei* $(Y_k f)(x) = \lim_{t \to \infty} t^{-1} (f(\exp t Y_k x) - f(x))$, $Y_k \in g$ *und* $P(\cdot, ..., \cdot)$ *ein Polynom, dann sind die Operatoren* B *und* $\bar{P} = P(Y_1, ..., Y_N)$, *wo* P *die Abschliessung von* $P = P(Y_1, ..., Y_N)$ $(D(P) = \mathfrak{G})$ *vertauschbar.*

Beweis. Wir beweisen zuerst, dass $B\mathfrak{C} \subset \mathfrak{G}$. Es sei $f = L_\varphi u = \int \varphi(y) L_y u dy$; wegen (5) und (4) haben wir

$$BL_\varphi u = Bf = B \int \varphi(y) L_y u dy = \int \varphi(y) L_y (Bu) dy = L_\varphi Bu. \tag{6}$$

Man hat aber bekanntlich [3] für jeden $Y \in g$

$$YL_\varphi u = L_{Y\varphi}, \qquad \varphi \in C_0^\infty(G). \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt also

$$BY(L_\varphi u) = BL_{Y\varphi} u = L_{Y\varphi} Bu = YL_\varphi Bu = YB(L_\varphi u) \tag{8}$$

identisch für $u \in H_0(G)$.

Die Identität (8) besagt, dass die Operatoren B und $P(= Y)$ auf dem Gårdingschen Raume vertauschbar sind. Es sei $\bar{P}$ die Abschliessung von $P = P(Y_1, ..., Y_N)$, wobei das Definitionsgebiet $D(P)$ von P der Gårdingsche Raum $\mathfrak{C}$ ist.

Es sei

$$D(P) = \mathfrak{C} \ni u_n \to u \in D(\bar{P}) \qquad \text{und} \qquad Pu_n \to \bar{P}u.$$

Dann folgt aus (8)

$$B\bar{P}u_n = BPu_n = PBu_n = \bar{P}Bu_n.$$

Wegen Stetigkeit von B konvergiert $B\bar{P}u_n$ gegen $B\bar{P}u$. Da $Bu_n \to Bu$ und $\bar{P}$ abgeschlossen sind, haben wir

$$Bu \in D(\bar{P}) \quad \text{und} \quad PBu_n \to \bar{P}Bu,$$

also $B\bar{P}u = \bar{P}Bu$, identisch für $u \in D(\bar{P})$.

3. Beschränktheit und Analyzität der Eigenfunktionen von $\bar{P} = \bar{P}^*$

Wir setzen jetzt voraus, dass der Differentialoperator P selbstadjungiert (allgemeiner: normal) ist. Aus der allgemeinen Theorie der Eigenfunktionsentwicklungen [7] folgt, dass die Operatoren $\bar{P}$ und B gemeinsame Eigendistributionen besitzen. Genauer: es gibt auf dem Produkte der Spektra von B und $\bar{P}$ ein positives Mass μ und für die gemeinsame Eigendistributionen von $\bar{P}$ und B gilt die Parswalssche Vollständigkeits-

relation. Die Aussagen des nachstehenden Satzes beziehen sich auf dieses vollständige (gemeinsame) System der Eigendistributionen von $\bar{P}$. Der Operator B^{-1} ist die selbstadjungierte (Friedrichssche) Fortsetzung des elliptischen Operators $\Delta = 1 + \sum X_k^+ X_k$, $D(\Delta) = C_0^\infty(G)$ mit analytischen Koeffizienten. Deshalb sind die Eigendistributionen von B^{-1} (also auch von B) nach einer Korrektur auf einer Nullmenge analytisch. Da Δ elliptisch ist, ist $B^{[N/4]+k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ein Integraloperator vom Carlemanschen Typus (vgl. [1]). Aus dem Lemma von Gårding wissen wir aber, dass $B^{[N/4]+k}$ linksinvariant ist. Aus dem vom Verfasser bewiesenen Satze [8] folgt also, dass μ — fast alle Eigenfunktionen von B auf der Gruppe G schwach beschränkt sind.

Es gilt also der folgende

SATZ 2. *Der normale Operator $\bar{P}$ besitzt ein (im oben erwähnten Sinne) vollständiges System der Eigenfunktionen. Diese Eigenfunktionen können so gewählt werden, dass sie* $(\mu - f.a.)$

1° *analytisch,*

2° *auf der ganzen Gruppe G schwach beschränkt sind.*

KORROLLAR. *Für symmetrische verschiebungsinvariante Differentialoperatoren (Laplace-Operatoren in der Terminologie von Gelfand) auf der Gruppe G sind beide Behauptungen von Satz 2 gültig* (vgl. [8]).

4. Diskretheit des Spektrums von $\bar{P}$ auf den prekompakten Untermengen von G

In diesem Abschnitt betrachten wir die Einschränkungen der Operatoren P und B auf dem Unterraum $C_0^\infty(\Omega)$. Da $C_0^\infty(\Omega)$ für $\Omega \neq G$ nicht verschiebungsinvariant ist, ist die zweite Aussage des Lemmas 1 für den Operator B_Ω ungültig. Um die Vertauschbarkeit von B_Ω mit P auf der Menge $C_0^\infty(\Omega)$ zu beweisen, muss man ganz anders als bei dem Beweise von Satz 1 vorgehen.

Wir definieren einen Hilbertschen Raum $H_{-1}(\Omega)$ der Distributionen auf Ω folgendermassen:

DEFINITION

$$H_{-1}(\Omega) = (H_1(\Omega))'. \tag{9}$$

Den Raum $H_{-1}(\Omega)$ kann man durch die Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega)$ in der Norm $\|u\|_{-1} \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{\|\varphi\|_1 \leqslant 1} (\|\varphi\|_1^{-1} \cdot |(u, \varphi)_0|)$ erhalten.

Wie aus der Definition der Räume $H_k(\Omega)$, $k = 0, 1$, folgt, ist der Raum $H_0(\Omega)$ (b.z.w. $H_1(\Omega)$ einem Unterraume von $H_0(G)$ isomorph (b.z.w. $H_1(G)$); die Einbettung

$$H_k(\Omega) \ni f \to \tilde{f} \in H_k(G), \qquad k = 0, 1 \tag{10}$$

bekommt man folgendermassen (vgl. [9]):

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für} \quad x \in \Omega, \\ 0 & \text{für} \quad x \notin \Omega. \end{cases}$$

Wir verstehen jetzt den Operator P im Sinne der Distributionentheorie: $P = \Delta' = \sum X_k^+ X_k + 1$

(X_k^+ — formaladjungierter Operator von X_k)

Das folgende Lemma ist klassisch (vgl. [8], [5]).

LEMMA 2. (L. Schwartz) *P ist ein topologischer Isomorphismus von $H_1(\Omega)$ auf $H_{-1}(\Omega)$:*

$$P : H_1(\Omega) \underset{\longrightarrow}{\text{auf}} H_{-1}(\Omega). \tag{11}$$

Beweis. Es sei $S \in H_1(\Omega) = H_1'(\Omega)$. Da $H_1(\Omega) \ni \varphi \to \langle \varphi, S \rangle$ stetig ist, haben wir

$$\langle \varphi, S \rangle = (\varphi, u)_1 = (P\varphi, u)_0 = \langle \varphi, Pu \rangle \text{ identisch für } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

DEFINITION. P^{-1} ist der zu (11) inverse (topologische) Isomorphismus (die s. g. Greensche Transformation).

Es gilt das folgende einfache

LEMMA 3. *Die Einschränkung $P^{-1}|_{H_0(\Omega)} = B_\Omega$.*

Beweis

$$\begin{aligned}(P^{-1} f, \varphi)_1 &= \sum (X_k P^{-1} f, X_k \varphi)_0 + (P^{-1} f, \varphi)_0 \\ &= \sum (P^{-1} f, X_k^+ X_k \varphi)_0 + (P^{-1} f, \varphi)_0 = (P^{-1} f, P\varphi)_0 \\ &= \langle PP^{-1} f, \varphi \rangle = (f, \varphi)_0 = (B_\Omega f, \varphi)_1\end{aligned} \tag{12}$$

identisch für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $f \in H_0(\Omega)$.

Aus (10)-(12) folgt

$$B_\Omega = P^{-1}|_{H_0(\Omega)} = (P^{-1}|_{H_0(G)})|_{H_0(G)} = B_G|_{H_0(\Omega)} = B|_{H_0(\Omega)}. \tag{13}$$

Es sei P_V die Einschränkung von P auf die Menge $\mathfrak{C} \cap V$, wo $\mathfrak{G} \cap V$ eine dichte lineare Untermenge von $H_0(\Omega)$ ist.

Da aber B mit P auf $\mathfrak{G}$ vertauschbar sind, haben wir

$$BP_V = P_V B \quad \text{auf} \quad \mathfrak{C} \cap V. \tag{14}$$

Wie wir wissen, bleibt die Relation (14) bei der Abschliessung erhalten; es gilt also der

SATZ 3. *Alle Operatoren $\bar{P}_V$ (Abschliessung von P_V) sind mit B vertauschbar*

$$B\bar{P}_V = \bar{P}_V B. \tag{15}$$

Im folgenden setzen wir voraus, dass Ω prekompakt ist (d.h., dass $\bar{\Omega}$ — kompakt ist).

Es gilt die folgende Modifikation des klassischen Lemmas von Rellich.

LEMMA 4. *Für prekompaktes Ω ist der Operator*

$$B_\Omega : H_0(\Omega) \to H_0(\Omega)$$

volstetig.

Beweis. Die Transformation $B_\Omega: H_0(\Omega) \to H_1(\Omega)$ bildet die $H_0(\Omega)$ — Einheitskugel in die Einheitskugel des Raumes $H_1(\Omega)$ um. Da aber die $H_1(\Omega)$ — Einheitskugel $H_0(\Omega)$ — kompakt ist, ist der Beweis der Vollstetigkeit von B_Ω erbracht.

Bemerkung. Das klassische Lemma von Rellich wurde für prekompakte Mengen des Euklidischen Raumes bewiesen, aber durch die Anwendung einer Zerlegung der Einheit überträgt sich das Rellichsche Lemma auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten (vgl. z. B. [6]). In einem geigneten Koordinatensystem hat dann jedes X_k die folgende Gestalt

$$X_k f(x) = a_k(x) \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \qquad \text{(keine Summation)}.$$

Da die $|a_k(x)| \geqslant \varepsilon > 0$ beschränkt sind, führt diese (endlichen) Koordinatenüberdeckung zugeordnete Zerlegung der Einheit auf den klassischen Fall zurück.

Wir errinnern an die folgende Definition des reinen Punktspektrums.

Definition. Der normale Operator A im Hilbertschen Raume H besitzt ein reines Punktspektrum falls die Eigenraüme endlichdimensional sind und den ganzen Raum H aufspannen.

Da B_Ω positiv und vollstetig ist, induziert er die folgende orthogonale Zerlegung des Raumes $H_0(\Omega)$

$$H_0(\Omega) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} H^i, \qquad \text{wo} \quad \dim H^i < \infty. \tag{16}$$

Wir setzen jetzt voraus, dass P_V normal ist; wir haben jetzt aus dem v. Neumannschen Spektralsatz den folgenden

Satz 4. *Die orthogonale Zerlegung* (16) *induziert die Zerlegung des normalen Operators* P_V *in die direkte Summe*

$$\bar{P}_V = \bigoplus_{i=1}^{\infty} P_V^i, \tag{17}$$

wobei $P_V^i : H^i \to H^i$ *normal in den endlich dimensionalen Räumen* H^i *sind. Die Eigenvektoren der Operatoren* P^i *bilden also das vollständige System der Eigenvektoren des Operators* $\bar{P}_V$. *Der Operator* $\bar{P}_V$ *besitzt also ein rein diskretes Spektrum.*

KORROLLAR. *Die Laplaceschen Operatoren besitzen auf prekompaktem Ω ein rein diskretes Spektrum. Insbesondere, ist das Spektrum der Laplace-Operatoren auf der kompakten Gruppe G diskret, so es gilt für sie die Zerlegung* (17).

MATHEMATISCHES INSTITUT, POLNISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
(INSTYTUT MATEMATYCZNY, PAN)

SCHRIFFTUM

[1] F. E. Browder, *The eigenfunctionexpansion theorem for the general self-adjoint singular elliptic partial differential operator*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **40** (1954), 454—463.

[2] L. Gårding, *Vecteurs analytiques* (in Vorbereitung).

[3] — *Note on continuous representations of Lie groups*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **33** (1947), 331—332.

[4] L. Hörmander, *On the theory of general partial differential operators*, Acta Math., **94** (1955), 161—248.

[5] J. L. Lions, *Problèmes aux limites en théorie des distributions*, ibid., S. 13—153.

[6] B. Malgrange, *Existence et approximation des solutions des equations aux dérivées partielles et des équations de convolution*, Ann. Inst. Fourier, **6** (1956), 271—355.

[7] K. Maurin, *Sphärische Distributionen auf homogenen Räumen*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys., **7** (1959), 151—155.

[8] — *Eine Abschätzung für Eigenfunktionen ...*, ibid. **7** (1959), 337—341.

[9] L. Schwartz. Séminaire 1954—1955, exposées 11—14, Paris, 1955 (vervielfältigt).

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys.—Vol. VIII, No. 1, 1960

MATHEMATICS

On the Embedding of Abstract Quasi Algebras into Equationally Definable Classes of Abstract Algebras

by

J. SŁOMIŃSKI

Presented by A. MOSTOWSKI on October 23, 1959

1. Quasi algebras. Let A be any non-empty set and A_1 a subset of A. Every function $f(x_1, x_2, ..., x_k)$ defined on A_1 with values in A will be called a *k-ary operator* in A with domain A_1. If $A_1 = A$, then f is a k-ary operation in A. Let α be any ordinal number. The sequence

$$\boldsymbol{A} = \langle A, (f_1, A_1), ..., (f_\xi, A_\xi), ... \rangle_{\xi<\alpha}, \tag{1}$$

wherein f_ξ is a k_ξ-ary operator in A with domain A_ξ, is called a *quasi algebra* of the type $\Delta = \langle k_1, ..., f_\xi, ... \rangle_{\xi<\alpha}$. If for all $\xi < \alpha$ $A_\xi = A$, then (1) is an *algebra* and it is denoted briefly by $\boldsymbol{A} = \langle A, f_1, ..., f_\xi, ... \rangle_{\xi<\alpha}$. Let $\boldsymbol{A}$ be a quasi algebra given by (1) and, moreover, let $\boldsymbol{B} = \langle B, (g_1, B_1), ..., (g_\xi, B_\xi), ... \rangle_{\xi<\alpha}$ be any other quasi algebra of the type Δ. A function $h(A) \subset B$ (or $h(A) = B$) is *a homomorphism* of $\boldsymbol{A}$ into (or onto) $\boldsymbol{B}$, if for all $\xi < \alpha$ $h(A_\xi) \subset B_\xi$ (or $h(A_\xi) = B_\xi$) and all $a_1, a_2, ..., a_{k_\xi}$ in A_ξ we have

$$h(f_\xi(a_1, a_2, ..., a_{k_\xi})) = g_\xi(h(a_1), h(a_2), ..., h(a_{k_\xi})).$$

If h is a homomorphism of $\boldsymbol{A}$ into $\boldsymbol{B}$, then the quasi algebra $h(\boldsymbol{A}) = \langle h(A), (g_1, h(A_1)), ..., (g_\xi, h(A_\xi)), ... \rangle_{\xi<\alpha}$ is a homomorphic image of $\boldsymbol{A}$. A homomorphism one-to-one is an isomorphism. A binary relation $\sim$ in A is a *congruence* of quasi algebra (1), if it is symmetric, reflexive and transitive and, moreover, for all $\xi < \alpha$ the conditions $a_1, a_2, ..., a_{k_\xi}$, $a'_1, a'_2, ...$, $a'_{k_\xi} \in A_\xi$, $a_1 \sim a'_1$, $a_2 \sim a'_2, ..., a_{k_\xi} \sim a'_{k_\xi}$ imply $f_\xi(a_1, a_2, ..., a_{k_\xi}) \sim f_\xi(a'_1, a'_2, ..., a'_{k_\xi})$.

(1.1). *If $\sim$ is a congruence of the quasi algebra* (1), *then the sequence* $\boldsymbol{A}/\sim = \langle A/\sim, (f_1/\sim, A_1/\sim), ..., (f_\xi/\sim, A_\xi/\sim), ... \rangle_{\xi<\alpha}$ *such that* $f_\xi/\sim (a_1/\sim, a_2/\sim, ..., a_{k_\xi}/\sim) = f_\xi(a_1, a_2, ..., a_{k_\xi})/\sim$ *for* $\xi < \alpha$ *and* $a_1, a_2, ..., a_{k_\xi} \in A_\xi$, *is a quasi algebra. The function* $h(a) = a/\sim$ *is a homomorphism of* $\boldsymbol{A}$ *onto* $\boldsymbol{A}/\sim$.

(1.2). *If h is a homomorphism of quasi algebra $\boldsymbol{A}$ into quasi algebra $\boldsymbol{B}$, then the relation $\sim$ in $\boldsymbol{A}$, such that $a \sim b$ if and only if $h(a) = h(b)$ is a congruence of $\boldsymbol{A}$. The function $j(a/\sim) = h(a)$ is an isomorphism of $\boldsymbol{A}/\sim$*

onto $h(\boldsymbol{A})$. *The congruence* $\sim$ *defined in* (1.2) *is called induced by homomorphism* h.

Let for every $t \in T$ $\boldsymbol{A}_t = \langle A^t, (f_1^t, A_1^t), \ldots, (f_\xi^t, A_\xi^t), \ldots \rangle_{\xi<\alpha}$ be any quasi algebra of the type Δ. Then

$$\underset{t\in T}{P}\, \boldsymbol{A}_t = \langle \underset{t\in T}{P}\, A^t, (F_1, \underset{t\in T}{P}\, A_1^t), \ldots, (F_\xi, \underset{t\in T}{P}\, A_\xi^t), \ldots \rangle_{\xi<\alpha},$$

where $F_\xi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{k_\xi}) = \varphi$ with $\varphi(t) = f_\xi^t(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_{k_\xi}(t))$ for $t \in T$, is also a quasi algebra of the type Δ. It is called *direct product of* $\boldsymbol{A}_t$, $t \in T$.

(1.3). *If* h_t, $t \in T$, *is a homomorphism of quasi algebra* $\boldsymbol{B}$ *into quasi algebra* $\boldsymbol{A}_t$, *then the function* $h(b) = \varphi \in \underset{t\in T}{P}\, A^t$, *if for all* $t \in T$ $\varphi(t) = h_t(b)$, *is a homomorphism of* $\boldsymbol{B}$ *into* $\underset{t\in T}{P}\, \boldsymbol{A}_t$. Hence, we obtain Birkhoff's product--theorem [1] for quasi algebras.

(1.4). *If* h_t, $t \in T$, *is a separating family of homomorphisms of quasi algebra* $\boldsymbol{B}$ *into quasi algebras* $\boldsymbol{A}_t$, *then the function* h *defined in* (1.3) *is an isomorphism of* $\boldsymbol{B}$ *into* $\underset{t\in T}{P}\, \boldsymbol{A}_t$.

2. Let $\boldsymbol{A} = \langle A, (f_1, A_1), \ldots, (f_\xi, A_\xi), \ldots \rangle_{\xi<\alpha}$ be any fixed quasi algebra of the type Δ and let $\boldsymbol{B} = \langle B, f_1', \ldots, f_\xi', \ldots \rangle_{\xi<\alpha}$ be any algebra of the type Δ. We say that h is a *homomorphism of* $\boldsymbol{A}$ *almost onto* $\boldsymbol{B}$ if h is a homomorphism of $\boldsymbol{A}$ into $\boldsymbol{B}$ and $h(A)$ generates the algebra $\boldsymbol{B}$. Let $\mathfrak{V}_0$ be any class of algebras of the type Δ. An algebra $\boldsymbol{B}$ is an *almost* $\mathfrak{V}_0$*-homomorphic image* of $\boldsymbol{A}$, if there exists a homomorphism h of $\boldsymbol{A}$ almost onto $\boldsymbol{B}$ and $\boldsymbol{B} \in \mathfrak{V}_0$. An algebra $\boldsymbol{B}$ is a $\mathfrak{V}_0$*-free homomorphic image* of $\boldsymbol{A}$, if $\boldsymbol{B} \in \mathfrak{V}_0$ and there exists such a homomorphism g of $\boldsymbol{A}$ almost onto $\boldsymbol{B}$ that for each algebra $\boldsymbol{B}_1 \in \mathfrak{V}_0$ and every homomorphism h of $\boldsymbol{A}$ into $\boldsymbol{B}_1$ there exists a homomorphism p of $\boldsymbol{B}$ into $\boldsymbol{B}_1$ with $h = pg$. The $\mathfrak{V}_0$-free homomorphic image of $\boldsymbol{A}$ is (if it exists there) uniquely determined up to isomorphisms by $\boldsymbol{A}$ and $\mathfrak{V}_0$. In the following we shall suppose that $\mathfrak{V}_0$ is equationally definable. The purpose of this paragraph is to

1° determine all almost $\mathfrak{V}_0$-homomorphic images of $\boldsymbol{A}$,

2° give the necessary and sufficient conditions for quasi algebra $\boldsymbol{A}$ to be isomorphically embeddable into an algebra $\boldsymbol{B} \in \mathfrak{V}_0$, and

3° to prove that there exists a $\mathfrak{V}_0$-free homomorphic image of $\boldsymbol{A}$.

Since, $\mathfrak{V}_0$ is equationally definable, there exists the $\mathfrak{V}_0$-free algebra $\boldsymbol{W} = \langle W, F_1, \ldots, F_\xi, \ldots \rangle_{\xi<\alpha}$ freely generated by A *).

(2.1). Let $\sim_0$ be the least congruence of $\boldsymbol{W}$ such that for all $\xi < \alpha$, all $a_1, a_2, \ldots, a_{k_\xi}$ in A_ξ we have

$$f_\xi(a_1, a_2, \ldots, a_{k_\xi}) \sim_0 F_\xi(a_1, a_2, \ldots, a_{k_\xi}).$$

The congruences $\sim$ of $\boldsymbol{W}$ with $\sim_0 \leqslant \sim$ are called $\mathfrak{V}_0$*-regularizers* of quasi algebra $\boldsymbol{A}$ and $\sim_0$ is *the minimal* $\mathfrak{V}_0$-regularizer of $\boldsymbol{A}$.

*) For the theory of abstract algebras see [2].

THEOREM 1. *Let* $\sim$ *be any* $\mathfrak{V}_0$*-regularizer of* $\boldsymbol{A}$. *Then* $\boldsymbol{W}/\sim$ *is an almost* $\mathfrak{V}_0$*-homomorphic image of* $\boldsymbol{A}$. *The function* $j_\sim(a) = a/\sim$, *for* $a \in A$, *is a homomorphism of* $\boldsymbol{A}$ *almost onto* $\boldsymbol{W}/\sim$.

Proof. Obviously $j_\sim(A)$ generates $\boldsymbol{W}/\sim$ and, moreover, for $\xi < \alpha$ and $a_1, a_2, \ldots, a_{k_\xi} \in A_\xi$ we have $j_\sim(f_\xi(a_1, a_2, \ldots, a_{k_\xi})) = f_\xi(a_1, a_2, \ldots, a_{k_\xi})/\sim = F_\xi(a_1, a_2, \ldots, a_{k_\xi})\sim = F_{\xi/\sim}(a_1\sim, a_2\sim, \ldots, a_{k_\xi}/\sim)$ and thus Theorem 1 is proved.

Let h be any homomorphism of the quasi algebra $\boldsymbol{A}$ into algebra $\boldsymbol{B} \in \mathfrak{V}_0$. Since $\boldsymbol{W}$ is a $\mathfrak{V}_0$-free algebra freely generated by A, the mapping $a \to h(a)$, for $a \in A$ can be extended to the homomorphism u_h of $\boldsymbol{W}$ into $\boldsymbol{B}$. Let $\sim_h$ be the congruence of $\boldsymbol{W}$ induced by homomorphism u_h. Then we can prove easily the following

THEOREM 2. *The congruence* $\sim_h$ *is a* $\mathfrak{V}_0$*-regularizer of* $\boldsymbol{A}$.

The congruence $\sim_h$ is called the $\mathfrak{V}_0$*-regularizer of* $\boldsymbol{A}$ *induced by homomorphism* h. We observe, moreover, that $i_h(w/\sim_h) = u_h(w)$, for $w \in W$ is an isomorphism of $\boldsymbol{W}/\sim_h$ onto the subalgebra $\boldsymbol{B}_1$ of $\boldsymbol{B}$ generated by $h(A)$. For $a \in A$ we have $i_h(j_{\sim_h}(a) = i_h(a/\sim_h) = u_h(a) = h(a)$. Thus, we have proved

THEOREM 3. *If* h *is a homomorphism of quasi algebra* $\boldsymbol{A}$ *into an algebra* $\boldsymbol{B} \in \mathfrak{V}_0$, *then* $h = i_h j_{\sim_h}$. *The mapping* h *is an isomorphism if and only if the* $\mathfrak{V}_0$*-regularizer* $\sim_h$ *of* $\boldsymbol{A}$ *induced by* h *is the identity relation on* A, *i. e. if and only if* $a \sim_h b$ *implies* $a = b$ *for* $a, b \in A$.

THEOREM 4. *Let* $\boldsymbol{A}$ *be any quasi algebra of the type* Δ, $\mathfrak{V}_0$ *any equationally definable class of algebras of the type* Δ *and, moreover, let* $\sim_0$ *be the minimal* $\mathfrak{V}_0$*-regularizer of* $\boldsymbol{A}$. *Then* $\boldsymbol{A}$ *can be isomorphically embedded into an algebra* $\boldsymbol{B} \in \mathfrak{V}_0$ *if and only if*

(i) *for all* $a, b \in A$ $\quad a \sim_0 b$ *implies* $a = b$.

Proof. If h is an isomorphism of $\boldsymbol{A}$ into $\boldsymbol{B} \in \mathfrak{V}_0$ then, by Theorem 3, $a \sim_h b$ implies $a = b$. But $\sim_0 \leqslant \sim_h$. Hence, the condition (i) holds. If $\sim_0$ fulfils (i), then the algebra $\boldsymbol{W}/\sim_0$ is an extension of $\boldsymbol{A}$, because $j_{\sim_0}(a) = a/\sim_0$ for $a \in A$, is an isomorphism of $\boldsymbol{A}$ almost onto $\boldsymbol{W}/\sim_0$.

THEOREM 5. *Let* $\boldsymbol{A}$, $\mathfrak{V}_0$ *and* $\sim_0$ *have the same meaning as in Theorem 4. Then* $\boldsymbol{W}/\sim_0$ *is a* $\mathfrak{V}_0$*-free homomorphic image of* $\boldsymbol{A}$, *where* $\boldsymbol{W}$ *is the* $\mathfrak{V}_0$*-free algebra freely generated by* A.

Proof. By Theorem 1 $j_{\sim_0}(a) = a/\sim_0$, for $a \in A$. is a homomorphism of $\boldsymbol{A}$ almost onto $\boldsymbol{W}/\sim_0$. Let $\boldsymbol{B} \in \mathfrak{V}_0$ and h be any homomorphism of $\boldsymbol{A}$ into $\boldsymbol{B}$. By Theorem 3 $h = i_h j_{\sim_h}$. Since $\sim_0 \leqslant \sim_h$, the mapping $j(w/\sim_0) = w/\sim_h$, for $w \in W$, is a homomorphism of $\boldsymbol{W}/\sim_0$ onto $\boldsymbol{W}/\sim_h$ and $j_{\sim_h} = jj_{\sim_0}$. Thus, $h = pj_{\sim_0}$, where $p = i_h j$ is a homomorphism of $\boldsymbol{W}/\sim_0$ into $\boldsymbol{B}$ and Theorem 5 is proved. From Theorems 1 and 2 we have

(2.2). *An algebra* $\boldsymbol{B}$ *is an almost* $\mathfrak{V}_0$*-homomorphic image of quasi algebra* $\boldsymbol{A}$ *if and only if it is isomorphic to algebra* $\boldsymbol{W}/\sim$, *where* $\sim$ *is any* $\mathfrak{V}_0$*-regularizer of* $\boldsymbol{A}$.

Let g_1 and g_2 be any homomorphisms of quasi algebra $\boldsymbol{A}$ into algebras $\boldsymbol{B}_1$ and $\boldsymbol{B}_2$ belonging to class $\mathfrak{V}_0$. Moreover, suppose that g_1 maps $\boldsymbol{A}$ almost onto $\boldsymbol{B}_1$. Let $\sim g_1$ and $\sim g_2$ be the $\mathfrak{V}_0$-regularizers of $\boldsymbol{A}$ induced by homomorphisms g_1 and g_2. Then we obtain

THEOREM 6. *In order to get* $\sim g_1 \leqslant \sim g_2$, *it is necessary and sufficient that there exist exactly one homomorphism* p *of* $\boldsymbol{B}_1$ *into* $\boldsymbol{B}_2$ *such that* $g_2 = pg_1$. *The homomorphism* p *maps "onto" if and only if* g_2 *maps "almost onto".*

Proof. By Theorem 3 $g_1 = ig_1\, j{\sim}g_1$ and $g_2 = ig_2\, jg_2$. Suppose that ${\sim}g_1 \leqslant {\sim}g_2$. Hence, $j(w/{\sim}g_1) = w/{\sim}g_2$, for $w \in W$, is a homomorphism of $\boldsymbol{W}/{\sim}g_1$ onto $\boldsymbol{W}/{\sim}g_2$ with $j{\sim}g_2 = jj{\sim}g_1$. Thus, $g_2 = pg_1$, where $p = ig_2\, jig_1^{-1}$. Reversely, from $g_2 = pg_1$ and the definitions of $\sim g_1$ and $\sim g_2$ it follows that $\sim g_1 \leqslant \sim g_2$.

3. $\mathfrak{V}_0$-tensor product of abstract algebras.

Let $\boldsymbol{A} = \langle A, f_1, ..., f_n\rangle$, $\boldsymbol{B} = \langle B, f_1', ..., f_n'\rangle$ and $\boldsymbol{C} = \langle C, f_1'', ..., f_n''\rangle$

be any three algebras of the type $\Delta = \langle k_1, ..., k_n\rangle$. A function $g(a, b)$ de-defined for all $a \in A$ and $b \in B$ with values in C is called *a bilinear of* $\boldsymbol{A}$ *and* $\boldsymbol{B}$ *into* $\boldsymbol{C}$, if for all $i \leqslant n$ and $a_1, a_2, ..., a_{k_i}$, $a \in A$ and $b_1, b_2, ..., b_{k_i}$, $b \in B$ we have

1° $g(f_i(a_1, a_2, ..., a_{k_i}), b) = f_i''(g(a_1, b), g(a_2, b), ..., g(a_{k_i}, b))$,

2° $g(a, f_i'(b_1, b_2, ..., b_{k_i})) = f_i''(g(a, b_1), g(a, b_2), ..., g(a, b_{k_i}))$.

Let $\mathfrak{V}_0$ be any class of algebras of the type Δ. An algebra $\boldsymbol{C}$ is called $\mathfrak{V}_0$-*tensor product of* $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ if $\boldsymbol{C} \in \mathfrak{V}_0$ and if there exists a bilinear $d(a, b)$ of $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ into $\boldsymbol{C}$ such that

(*) the set $\{d(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$ generates $\boldsymbol{C}$, and

(**) for every algebra $\boldsymbol{D} \in \mathfrak{V}_0$ and for any bilinear $g(a, b)$ of $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ into $\boldsymbol{D}$ there exists a homomorphism h of $\boldsymbol{C}$ into $\boldsymbol{D}$ with $g(a, b) = h(d(a, b))$ for all $a \in A$ and $b \in B$.

The $\mathfrak{V}_0$-tensor product of $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ is denoted by $\boldsymbol{A} \otimes_{\mathfrak{V}_0} \boldsymbol{B}$ or if $\mathfrak{V}_0$ is fixed by $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$. The element $d(a, b)$ is denotes by $a \otimes b$. It follows from the definition that if there exists $\boldsymbol{A} \otimes_{\mathfrak{V}_0} \boldsymbol{B}$, then it is uniquely (up to isomorphisms) determined by $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$.

Let us suppose that $\mathfrak{V}_0$ is an equationally definable class of algebras. Then we have the following theorems:

(3.1). *There exists the* $\mathfrak{V}_0$-*tensor product of* $\boldsymbol{A}$ *and* $\boldsymbol{B}$.

Proof. Let $\boldsymbol{W}^* = \langle W^*, F_1^*, ..., F_n^*\rangle$ be the $\mathfrak{V}_0$-free algebra freely generated by $A \times B$ and $\sim$ be the least congruence of $\boldsymbol{W}$ such that for all $i \leqslant n$ and $a, a_1, a_2, ..., a_{k_i} \in A$, $b, b_1, b_2, ..., b_{k_i} \in B$.

1° $\langle f_i(a_1, a_2, ..., a_{k_i}), b\rangle \sim F_i^*(\langle a_1, b\rangle, \langle a_2, b\rangle, ..., \langle a_{k_i}, b\rangle)$,

2° $\langle a, f_i'(b_1, b_2, ..., b_{k_i})\rangle \sim F_i^*(\langle a, b_1\rangle, \langle a, b_2\rangle, ..., \langle a, b_{k_i}\rangle)$.

The algebra $\boldsymbol{W}^*/\sim$ is the $\mathfrak{V}_0$-tensor product of $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ with $d(a,b) = \langle a,b\rangle/\sim = a \otimes b$ as the natural bilinear.

(3.2). Let $\sim_1$ and $\sim_2$ be any congruence of $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ and $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ and $\boldsymbol{A}/\sim_1 \otimes \boldsymbol{B}/\sim_2$ be the $\mathfrak{V}_0$-tensor products. Moreover, let $\sim$ be the least congruence of $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ such that for all $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ $a_1 \otimes b_1 \sim a_2 \otimes b_2$, if $a_1 \sim a_2$ and $b_1 \sim b_2$. Then the algebra $\boldsymbol{A}/\sim_1 \otimes \boldsymbol{B}/\sim_2$ is isomorphic to $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}/\sim$.

4. *Let $\mathfrak{V}$ be any class of algebras of the type $\Delta_1 = \langle k_1, \ldots, k_n\rangle$ and let $\boldsymbol{R} = \langle R, f_1^*, \ldots, f_n^*, \circ\rangle$ be such an algebra of the type $\langle k_1, \ldots, k_n, 2\rangle$ that 1° $(r \circ s) \circ r_1 = r \circ (s \circ r_1)$, for all $r, s, r_1 \in R$; 2° there exists $e \in R$ with $e \circ r = r \circ e = r$ for $r \in R$ and 3° for all $i \leqslant n$ and $r, r_1, r_2, \ldots, r_{k_i} \in R$ we have*

(a) $$r \circ f_i^*(r_1, r_2, \ldots, r_{k_i}) = f_i^*(r \circ r_1, r \circ r_1, \ldots, r \circ r_{k_i}),$$

(b) $$f_i^*(r_1, r_2, \ldots, r_{k_i}) \circ r = f_i^*(r_1 \circ r, r_2 \circ r, \ldots, r_{k_i} \circ r).$$

A quasi algebra $\boldsymbol{X} = \langle X, f_1, \ldots, f_n, (r, X_r)\, r \in R\rangle$ of the type $\Delta = \langle k_1, \ldots, k_n, (1_r)\, r \in R\rangle$ with $1_r = 1$ is called *$\mathfrak{V}$-algebra with differential operators over $\boldsymbol{R}$* or briefly *d-$\mathfrak{V}$-algebra* if $\boldsymbol{X}\, n = \langle X, f_1, \ldots, f_n\rangle \in \mathfrak{V}$ and, for $r \in R$, X_r is a subalgebra of $\boldsymbol{X}\, n$ and r is a homomorphism of X_r into $\boldsymbol{X}\, n$, moreover, e is the identity homomorphism of X_e into $\boldsymbol{X}\, n$. *A $\mathfrak{V}$-module over $\boldsymbol{R}$* or briefly a *$\mathfrak{V}$-module* is any algebra $\boldsymbol{Z} = \langle Z, f_1', \ldots, f_n', (\alpha_r)\, r \in R\rangle$ of the type Δ such that $\boldsymbol{Z}\, n = \langle Z, f_1', \ldots, f_n'\rangle \in \mathfrak{V}$ and for all $i \leqslant n$ and $z, z_1, z_2, \ldots, z_{k_i} \in Z$ and $r, s, r_1, r_2, \ldots, r_{k_i} \in R$ we have

1° $\alpha_r(f_i'(z_1, z_2, \ldots, z_{k_i})) = f_i'(\alpha_r(z_1), \alpha_r(z_2), \ldots, \alpha_r(z_{k_i}))$,

2° $\alpha_{f_i^*(r_1, r_2, \ldots, r_{k_i})}(z) = f_i'(\alpha_{r_1}(z), \alpha_{r_2}(z), \ldots, \alpha_{r_{k_i}}(z))$,

3° $\alpha_r(\alpha_s(z)) = \alpha_{r \circ s}(z)$,

4° $\alpha_e(z) = z$.

In what follows we shall suppose that $\mathfrak{V}$ is equationally definable. Hence, the class $\mathfrak{V}_m$ of all $\mathfrak{V}$-modules is also equationally definable. Let $\boldsymbol{X}$ be a fixed d-$\mathfrak{V}$-algebra. Now let us consider the homomorphisms of $\boldsymbol{X}$ into $\mathfrak{V}$-modules $\boldsymbol{Z} \in \mathfrak{V}_m$. By Theorems 1-6 of par. **2** a study of these homomorphisms is given. In this case Theorems 1-6 may be also formulated by using the $\mathfrak{V}$-tensor product $\boldsymbol{R} \underset{m}{\otimes} \boldsymbol{X} = \langle R \otimes X, f_1'', \ldots, f_n''\rangle$ of algebras $\boldsymbol{R}|n = \langle R, f_1^*, \ldots, f_n^*\rangle$ and $\boldsymbol{X}|n = \langle X, f_1, \ldots, f_n\rangle$. In fact, putting for $r, s \in R$ and $x \in X$ $g_r(s, x) = r \circ s \otimes x$ we obtain a bilinear of $\boldsymbol{R}|n$ and $\boldsymbol{X}|n$ into $\boldsymbol{R} \otimes \boldsymbol{X}$. Hence, by the definition of the $\mathfrak{V}$-tensor product the mapping $s \otimes x \to r \circ s \otimes x$ may be extended to a homomorphism β_r of $\boldsymbol{R} \otimes \boldsymbol{X}$ into itself. It can be proved that $\boldsymbol{R} \underset{m}{\otimes} \boldsymbol{X} = \langle R \otimes X, f_1'', \ldots, f_n'', (\beta_r)\, r \in R\rangle$ is a $\mathfrak{V}$-module. Let $\boldsymbol{W} = \langle W, F_1, \ldots, F_n, (\gamma_r)\, r \in R\rangle$ be the $\mathfrak{V}_m$-free algebra freely generated by X. The mapping $x \to e \otimes x$ may be extended to a homomorphism i of $\boldsymbol{W}$ onto $\boldsymbol{R} \underset{m}{\otimes} \boldsymbol{X}$. It may be proved that

(4.1). *The function i is an isomorphism of $\boldsymbol{W}$ onto $\boldsymbol{R} \underset{m}{\otimes} \boldsymbol{X}$.*

Let $\sim$ be any congruence of $\boldsymbol{W}$. Since i is an isomorphism of $\boldsymbol{W}$ onto $\boldsymbol{R} \underset{m}{\otimes} \boldsymbol{X}$, $\sim$ determines uniquely the congruence $\approx$ of $\boldsymbol{R} \underset{m}{\otimes} \boldsymbol{X}$ such that for all $a, b \in R \otimes X$ $a \approx b$ if and only if $i^{-1}(a) \sim i^{-1}(b)$. The congruence $\approx$ is called the isomorphic image of $\sim$. Obviously, $j(w/\sim) = i(w/\approx)$, for $w \in W$, is an isomorphism of $\boldsymbol{W}/\sim$ onto $\boldsymbol{R} \underset{m}{\otimes} \boldsymbol{X}/\approx$. A congruence $\approx$ of $\boldsymbol{R} \underset{m}{\otimes} \boldsymbol{X}$ is called a regularizer of $\boldsymbol{X}$, if it is the isomorphic image of a congruence $\sim$ of $\boldsymbol{W}$ which is a $\mathfrak{V}_m$-regularizer of $\boldsymbol{X}$. Hence, and from (2.1) it follows that.

(4.2). *A congruence $\approx$ of $\boldsymbol{R} \underset{m}{\otimes} \boldsymbol{X}$ is a regularizer of $\boldsymbol{X}$ if and only if*

(c) for all $r \in R$ and $x \in X_r$ $e \otimes r(x) \approx r \otimes x$.

The least congruence $\approx_0$ of $\boldsymbol{R} \underset{m}{\otimes} \boldsymbol{X}$ having the property (c) is the minimal regularizer of $\boldsymbol{X}$. It is the isomorphic image of the minimal $\mathfrak{V}_m$-regularizer of $\boldsymbol{X}$. By Theorems 5 and 1 we obtain

(4.3). $\boldsymbol{R} \underset{m}{\otimes} \boldsymbol{X}/\approx_0$ is the $\mathfrak{V}_m$-free homomorphic image of $\boldsymbol{X}$.

(4.4). *If $\approx$ is a regularizer of $\boldsymbol{X}$, then $\boldsymbol{R} \underset{m}{\otimes} \boldsymbol{X}/\approx$ is an almost $\mathfrak{V}_m$-homomorphic image of $\boldsymbol{X}$. The function $j_{\approx}(x) = e \otimes x/\approx$ is a homomorphism of $\boldsymbol{X}$ almost onto $\boldsymbol{R} \underset{m}{\otimes} \boldsymbol{X}/\approx$.*

Let h be any homomorphism of $\boldsymbol{X}$ into $\boldsymbol{Z} \in \mathfrak{V}_m$ and let $\approx_h$ be the isomorphic image of the $\mathfrak{V}_m$-regularizer $\sim_h$ of $\boldsymbol{X}$ induced by h. By Theorem 2 we have

(4.5). *$\approx_h$ is a regularizer of $\boldsymbol{X}$. It is called induced by h.*

The congruence $\approx_h$ of $\boldsymbol{R} \underset{m}{\otimes} \boldsymbol{X}$ is induced by the homomorphism v_h of $\boldsymbol{R} \underset{m}{\otimes} \boldsymbol{X}$ into $\boldsymbol{Z}$ with $v_h(e \otimes x) = h(x)$, for $x \in X$. The function $i_h(c/\approx_h) = v_h(c)$, for $c \in R \otimes X$, is an isomorphism of $\boldsymbol{R} \underset{m}{\otimes} \boldsymbol{X}/\approx_h$ into $\boldsymbol{Z}$. From Theorems 3 and 4 follow the theorems given below:

(4.6). *Let h be any homomorphism of $\boldsymbol{X}$ into $\boldsymbol{Z} \in \mathfrak{V}_m$. Then $h = i_h j_{\approx_h}$. h is an isomorphism if and only if for all x_1 and x_2 in X the condition $e \otimes x_1 \approx_h e \otimes x_2$ implies $x_1 = x_2$.*

(4.7). *A d-$\mathfrak{V}$-algebra $\boldsymbol{X}$ may be isomorphically embedded into $\boldsymbol{Z} \in \mathfrak{V}_m$ if and only if the minimal regularized $\approx_0$ of $\boldsymbol{X}$ has the property: for all $x_1, x_2 \in X$ $e \otimes x_1 \approx_0 e \otimes x_2$ implies $x_1 = x_2$.*

By Theorem 2.2 we obtain

(4.8). *A module $\boldsymbol{Z} \in \mathfrak{V}_m$ is almost a $\mathfrak{V}_m$-homomorphic image of $\boldsymbol{X}$ if and only if it is isomorphic to $\boldsymbol{R} \underset{m}{\otimes} \boldsymbol{X}/\approx$, where $\approx$ is a regularizer of $\boldsymbol{X}$.*

Let g_1 and g_2 be any homomorphisms of $\boldsymbol{X}$ into $\boldsymbol{Z}_1$ and $\boldsymbol{Z}_2$ belonging to $\mathfrak{V}_m$. Moreover, let g_1 map $\boldsymbol{X}$ almost onto $\boldsymbol{Z}_1$ and let $\approx_{g_1}$ and $\approx_{g_2}$ be the regularizers of $\boldsymbol{X}$ induced by g_1 and g_2. Then, from Theorem 6 results

(4.9). *In order that* $\approx g_1 \leqslant \approx g_2$, *it is necessary and sufficient that there exist exactly one homomorphism* p *of* $\boldsymbol{Z}_1$ *into* $\boldsymbol{Z}_2$ *such that* $g_2 = p g_1$. *The homomorphism* p *maps "onto" if and only if* g_2 *maps "almost onto".*

Finally we remark that from Theorems (4.3)-(4.9) the Theorems 2, 3, 4, 5 and 6 of Słowikowski's paper [3] follow. In fact, suppose that $\mathfrak{L}$ is the class of Abelian groups with operations $+$ and $-$ and $\boldsymbol{R}$ is a ring. Then every congruence $\approx$ of $\mathfrak{L}$-module $\boldsymbol{Z}$ is determining by the submodule $Z_{\approx} = \{z : z \approx 0\}$ with property: $z_1 \approx z_2$ if and only if $z_1 + (-z_2) \in Z_{\approx}$. Hence, the congruences mentioned in (4.2)-(4.9) may be replaced by the submodules of $\boldsymbol{R} \underset{m}{\otimes} \boldsymbol{X}$ determining these congruences. Thus, from (4.3) we obtain the Theorem 2, from (4.6) the Theorem 5 and from (4.9) the Theorem 6 of Słowikowski's paper [3].

NICHOLAS COPERNICUS UNIVERSITY, TORUŃ
(UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA, TORUŃ)

REFERENCES

[1] G. Birkhoff, *Subdirect unions in universal algebras,* Bull. Amer. Math. Soc., **50** (1944), 764—768.

[2] J. Słomiński, *The theory of abstract algebras with infinitary operations,* Rozpr. Matem., **18** (1959), 1—67.

[3] W. Słowikowski, *On regular embeddings of a group with differential operators,* Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math. astr. et phys., **7** (1959), 119—124.

БЮЛЛЕТЕНЬ
ПОЛЬСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
Серия мат., астр. и физ. наук
Том VIII, № 1, 1960

МАТЕМАТИКА

Б. В. БОЯРСКИЙ

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВЕ

Представлено С. МАЗУРОМ 27 октября 1959

Линейная система дифференциальных уравнений в частных производных

$$(1)\qquad \sum_{i_1+i_2+\ldots i_n=s} A_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\frac{\partial^s u}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}}+Bu=f,$$

где $A_{i_1,\ldots,i_n}(x)$ — квадратные действительные матрицы размерами $m\times m$, u — вектор $(u_1,\ldots,u_m)$ и Bu — дифференциальный оператор порядка меньше s, называется эллиптической в области D, если

$$(2)\qquad \det A(x;\xi)\neq 0,\qquad A(x;\xi)=\sum_{i_1+i_n=s} A_{i_1,\ldots,i_n}(x)\xi_1^i,\ldots,\xi_n^{i_n}$$

для всех действительных $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\neq 0$ и всех $x\in D$.

В соответствии с неравенством (2) возможны два случая

$$(2')\qquad \alpha)\ \det A(x;\xi)>0,\qquad \beta)\ \det A(x;\xi)<0.$$

С точки зрения дифференциальных уравнений различие между случаями $2'\alpha$) и $2'\beta$) несущественно и простым преобразованием любую систему можно привести к случаю, когда выполняется условие $2'\alpha$.

Множество всех эллиптических систем (1) с постоянными коэффициентами, удовлетворяющих условию $2'\alpha$, будем обозначать через $E_n^{m,s}$.

Вопрос о структуре компонент связности *) множества $E_n^{m,s}$ поставлен в [1] и [2]. В нашей работе [3] этот вопрос подробно разобран для множества $E_z^{z,s}$. В частности, там показано, что $E_z^{z,z}$ состоит из трех компонент ε_1, ε_2, ε_3 из которых (согласно обозначениям статьи [3]) ε_2 содержит систему $\Delta u_1=0$, $\Delta u_2=0$.

*) Так как $E_n^{m,s}$, естественно, есть открытое подмножество евклидова пространства достаточно большого числа измерений, то элементарные топологические понятия применимы к $E_n^{m,s}$ автоматически.

Там же показано, что вся компонента ε_2 корректна в отношении основных граничных задач, задачи Дирихле и задачи Неймана. Под этим мы понимаем, что эти задачи сводятся эквивалентным образом к системе интегральных уравнений Фредгольма (фредгольмовость задачи) или к системе сингулярных интегральных уравнений нормального типа (нэтэровость задачи). Аналогичный факт имеет место для систем уравнений с переменными коэффициентами. В частности, примеры систем уравнений, для которых задача Дирихле не нэтэрова, могут лежать лишь в ε_1 или ε_3 и, как известно, на самом деле они там есть [4]. Кроме того, пример указанный в [5] показывает, что индекс $\varkappa = l - l'$ задачи Дирихле для систем с переменными коэффициентами из ε_1 (или ε_3) может быть любым целым четным числом (в формуле $\varkappa = l - l' - l$ означает число линейно независимых решений однородной задачи, l' — число независимых условий разрешимости неоднородной задачи). В ε_2 это невозможно; там $\varkappa = 0$.

1. В настоящей работе мы рассматриваем аналогичные вопросы для $n > 2$, причем в настоящем изложении мы ограничимся случаем $m = 2$, $s = 2$, т. е. случаем систем двух уравнений второго порядка. Совершенно аналогично рассматривается случай $m = 2$, s — любое. В случае произвольных m, в самом общем виде, еще пока не все трудности преодолены и соответствующих формулировок мы не приводим. Однако, в порядке гипотезы, проверенной на широких классах систем с произвольным m, можно высказать убеждение, что качественная картина при $m > 2$ такая же, как и при $m = 2$.

Настоящее изложение имеет предварительный характер и подробные доказательства будут изложены в другом месте. Основные идеи указываются ниже.

2. С топологической точки зрения основное отличие случая $n > 2$ от случая $n = 2$, разобранного в [3], состоит в следущем факте:

ЛЕММА. *При $n > 2$ $E_n^{z,z}$ состоит из одной компоненты связности.*

В доказательстве леммы используются приемы нашей работы [3] и другие элементарные рассуждения.

Так как лемма исключает „топологическую возможность" существования систем уравнений эллиптического типа в пространстве размерностей, обладающих свойствами примеров А. В. Бицадзе [4], то она подсказывает гипотезу о том, что при $n > 2$ такие примеры вообще невозможны. Наш второй результат состоит в том, что это действительно так. Точнее говоря, мы доказываем теорему:

ТЕОРЕМА. *Задача Дирихле для любой системы из $E_n^{z,z}$, $n > 2$, и любой области D (односвязной, ограниченной достаточно гладкой поверхностью топологического типа сферы) приводится к эквивалентной системе интегральных уравнений Фредгольма. Это же верно для*

систем с достаточно регулярными переменными коэффициентами, которые принадлежат к $E_n^{z,z}$ *в каждой точке* $x \in D$.

Для доказательства привлекается следующий результат Я. Б. Лопатинского [6] в применении к частному случаю задачи Дирихле (аналогичный результат получен еще раньше З. Я. Шапиро [7], [8]).

Если для каждого ненулевого действительного вектора $\xi' = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$ и всех $x \in \dot{D}$, $\dot{D}$ — граница области D,

$$\det \int_{-\infty}^{+\infty} A^{-1}(x; \xi', \xi_n)\, d\xi_n \neq 0, \tag{3}$$

то задача Дирихле для области D и системы (1) приводится к системе регулярных интегральных уравнений типа Фредгольма.

Для справедливости этого утверждения, кроме неравенства (3) накладываются еще различные требования регулярности на коэффициенты системы (1) как функции точки $x \in D + D'$ и границу $\dot{D}$ [6]. Для краткости мы этих требований здесь не перечисляем, ограничиваясь лишь теми случаями, когда они выполнены.

Для доказательства теоремы проверим, что в классе $E_n^{z,z}$ при $n > 2$ (и в ε_2 при $n = 2$) условие (3) выполнено.

Набросок доказательства. Согласно правилу предложенному в [3], сопоставим каждой матрице $A(\xi)$, удовлетворяющей условию (2) при $n > 2$ или отвечающей системе из ε_2 при $n = 2$ комплексные формы $\alpha = \alpha(\xi', \xi_n)$ и $\beta = \beta(\xi', \xi_n)$ удовлетворяющие условию

$$|\alpha| > |\beta| \tag{4}$$

для действительных ξ. Из (4) следует, что при $n > 2$ (или в ε_2) уравнение $\alpha(\xi', \xi_n) = 0$ имеет при любом $\xi' \neq 0$, один комплексный корень в верхней ξ_n-полуплоскости и один в нижней ξ_n-полуплоскости [3], [6]. При $\beta \equiv 0$, после некоторых преобразований проверка условия (3) сводится к неравенству

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha \xi_n}{\alpha(\xi', \xi_n)} \neq 0 \tag{5}$$

и при любом β к неравенству

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{\alpha} + \mu\beta}{|\alpha|^2 - |\beta|^2}\, \alpha \xi_n \neq 0 \tag{6}$$

для любого комплексного μ, такого что $|\mu| = 1$. Однако, ввиду сказанного, (5) выполняется тривиальным образом. Неравенство (6), в силу

теоремы Руше и неравенства (4) оказывается частным случаем следующего факта: интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\lambda-\mu_1)(\lambda-\mu_2)}{|\lambda-\lambda_1|^2\,|\lambda-\lambda_2|^2}\,d\lambda$$

отличен от нуля, если только выполнены условия

$$\operatorname{Im}\lambda_1 \cdot \operatorname{Im}\lambda_2 > 0, \qquad \operatorname{Im}\mu_1 \cdot \operatorname{Im}\mu_2 < 0.$$

Сформулируем основные следствия, какие можно вывести из доказанного:

1) В пространстве измерений больше двух невозможно построить систему двух уравнений эллиптического типа, для которой например, задача Дирихле для некоторого шара, допускала бы бесконечное число линейно независимых решений. Примеры А. В. Бицадзе [4] специфичны для двумерного случая. В частности, вызванное этими примерами [9] условие сильной эллиптичности оказывается излишним для фредгольмовости задачи Дирихле при $n > 2$.

2) Однородная задача Дирихле в $E_n^{z,z}$, $n > 2$ $f \equiv 0$, при соответствующих требованиях регулярности на коэффициенты системы и границу области D, допускает лишь конечное число линейно независимых решений (зависящее, вообще говоря, от системы и области).

3) Неоднородная задача Дирихле для системы (1) в $E_n^{z,z}$, $n > 2$ разрешима лишь при выполнении l' интегральных условий вида *)

$$\int_D (f, v_j)\,dx = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, l', \tag{7}$$

где v_j — некоторая система линейно независимых вектор функций (решений сопряженной задачи). Условия (7) также необходимы для разрешимости неоднородной задачи.

4) Имеет место соотношение

$$l - l' = 0, \tag{8}$$

т. е. индекс задачи Дирихле в $E_n^{z,z}$ при $n > 2$ всегда нуль.

5) Следствия 2), 3), 4) верны также при переменных коэффициентах.

В заключение сделаем следующие замечания:

1) В том случае, когда система двух действительных уравнений может быть записана в виде одного комплексного уравнения вида

$$\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + Bu = f \tag{9}$$

*) Символ (f, v) обозначает обычное скалярное произведение.

(мы рассматриваем лишь случай $s = 2$), где a_{ij} комплексные функции и u — комплексная неизвестная функция, следствие 3) при $l' = 0$ доказано иным путем в работах М. Шехтера [10], [11]. Заметим однако, что к виду (9) приводятся лишь системы двух уравнений весьма частного вида (в наших обозначениях когда $\beta = 0$). Кроме того, в условиях теоремы Шехтера из (8) следует единственность решения задачи.

2) При $s > 2$ формулировка теоремы остается без изменений, но проверка условия типа (3) приводит к более сложным вычислениям.

3) Аналогичные вычисления возможны для второй граничной задачи и других задач дифференциального типа.

ИНСТИТУТ ГИДРОДИНАМИКИ СО АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, И. Г. Петровский, Г. Е. Шилов, Труды III Всесоюзного Математического Съезда, Москва, 1958. стр. 65—72.

[2] И. М. Гельфанд, «Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений», УМН, **14** (1959).

[3] Б. В. Боярский, «О первой краевой задаче для систем уравнений эллиптического типа второго порядка на плоскости», Bull. Acad. Polon. Sci., Serie des math., astr. et phys. **7** (1959), 565—570.

[4] А. В. Бицадзе, УМН, **3** (1958), 211—212.

[5] А. И. Вольперт ,ДАН УССР, (1958), № 10.

[6] Я. Б. Лопатинский, «Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям», Укр. Мат. Журн., **5** (1938).

[7] З. Я Шапиро, «Первая краевая задача для эллиптической системы дифференциальных уравнений», Матем. Сб., **28** (1951), 55—78.

[8] — «Об общих краевых задачах для уравнений эллиптического типа», Известия АН СССР, Сер. матем., **17** (1953), 539—562.

[9] М. И. Вишик, «О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений», Матем. Сб. **29** (1951).

[10] M. Schechter, *On estimating elliptic partial differential operators in the L_2, norm.*, Amer. Journ. Math. **79** (1957), N 2.

[11] M. Schechter, *Solution of the Dirichlet problem for equations not necessarily strongly elliptic*, Comm. Pure and Appl. Math., **17** (1959), 241—247.

B. BOJARSKI, ON THE DIRICHLET PROBLEM FOR A SYSTEM OF ELLIPTIC EQUATIONS IN SPACE

Using a result by Lopatinskiĭ the author proves that the Dirichlet problem for systems of two second order elliptic equations in n-dimensional space, $n \geqslant 3$, is always equivalent to a system of Fredholm integral equations. Topological reasons for and generalizations of this fact are given.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys.—Vol. VIII, No. 1, 1960

MATHÉMATIQUE

Sur le théorème de Cauchy-Goursat

par

M. BIERNACKI

Présenté par A. MOSTOWSKI le 2 novembre, 1959

E. Goursat a démontré le premier le

THÉORÈME A. *Si une fonction $f(z)$ de la variable complexe possède une dérivée finie en tous points d'un domaine, cette dérivée y est nécessairement continue* *).

La démonstration connue de ce théorème est très indirecte. Elle utilise, en effet, le théorème (démontré par E. Goursat), suivant lequel, sous les conditions de l'énoncé A, l'intégrale de $f(z)$ prise le long d'un contour fermé contenu dans le domaine est nulle. N. N. Lousine a signalé il y a longtemps l'interêt d'une démonstration directe du Théorème A. En effet, une fois le Théorème A établi, on peut obtenir immédiatement, à l'aide de la formule élémentaire de Green, le théorème sur l'intégrale mentionnée plus haut avec toutes ses nombreuses conséquences. Une telle démonstration directe a été obtenue par G. M. Adelson-Vielski et A. S. Kronrod [1]—[3]. Cependant, cette démonstration est assez longue et compliquée, elle semble pourtant intéressante surtout grâce aux certaines généralisations relatives aux fonctions quasi-analytiques. Cette démonstration semble d'ailleurs être assez peu connue, car en 1953 L. V. Ahlfors ecrivait ([4] p. 82): „Nobody has been able to prove that the derivative of an analytic function is continuous, without resorting to complex integrals or equivalent tools".

De même, G. T. Whyburn signale en 1958 ([6], p. 89) „qu'il n'est pas encore possible d'établir le Théorème A par des méthodes topologiques". En tenant compte de ces opinions, R. L. Plunkett a publié tout récemment [5] une démonstration topologique du théorème A. Bien qu'elle soit assez brève, cette démonstration est en fait compliquée, car elle utilise des théorèmes d'ordre assez élevé du livre cité de G. T. Whyburn ([6] Théorèmes (3.4), p. 85, et (4.1), p. 88).

*) Ce théorème a été considérablement généralisé par D. Menchoff et par d'autres auteurs. Nous n'allons pas nous occuper ici de ces généralisations.

Nous nous proposons d'exposer ici une démonstration du Théorème A entièrement différente de celles précedemment citées. Cette démonstration est tout à fait élementaire et n'utilise pas la notion de l'intégrale *).

Soit z_0 un point du domaine considéré. Nous allons établir que $f'(z)$ est continue au point $z=z_0$. En supposant qu'il n'en est pas ainsi, nous obtiendrons une contradiction. En effectuant une transformation linéaire sur la variable z et en ajoutant à $f(z)$ une fonction linéaire $az+b$ convenable, on peut admettre que $z_0=0$, $f(0)=f'(0)=0$. Supposons donc qu'il existe une suite z telle que $z_n\to 0$ et $f'(z_n)\to a\neq 0$ (a peut être infini). Considérons les cercles Γ_n de centres z_n et de rayons $|z_n|$ (dont les circonférences passent par 0) et des fonctions

$$\varphi_n(z)=\frac{f(z)-f(z_n)}{z-z_n}\equiv\frac{\dfrac{f(z)}{z}\cdot\dfrac{z}{z_n}-\dfrac{f(z_n)}{z_n}}{\dfrac{z-z_n}{z_n}} \qquad (z\neq z_n),\ \varphi_n(z_n)=f'(z_n).$$

$\varphi_n(z)$ est continue dans tout le cercle Γ_n et y possède une dérivée finie, sauf, peut être, au point $z=z_n$. De la deuxième expression de $\varphi_n(z)$ donnée ci-dessus il résulte immédiatement que si z reste dans la couronne circulaire

$$a|z_n|<|z-z_n|\leqslant|z_n|,$$

où a est un nombre fixe, $0<a<1$, $\varphi_n(z)\to 0$ uniformément lorsque $n\to\infty$ (en effet, $f(z)/z\to 0$, $f(z_n)/z_n\to 0$, $|z_n|\leqslant 2$, $|(z-z_n)/z_n|$ est compris entre a et 1). Or, $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(z_n)=\lim f'(z_n)=a\neq 0$; donc, si M_n est le maximum de $|\varphi_n(z)|$ dans le cercle Γ_n, on peut supposer que $\lim\limits_{n\to\infty}M_n=M>0$ (M peut être infini). Je vais utiliser maintenant le lemme suivant.

LEMME. *Si une fonction $\varphi(z)$ de la variable complexe z, continue le long du segment rectiligne $\langle z_1,z_2\rangle$ fermé, possède le long du segment (z_1,z_2) ouvert une dérivée nulle, alors $\varphi(z_2)=\varphi(z_1)$.*

En effectuant une transformation linéaire on peut supposer que le segment $\langle z_1,z_2\rangle$ est situé sur l'axe réel et la démonstration du lemme se réduit alors à celle du cas bien connu où tout est réel. Soit maintenant ζ_n le point de Γ_n où $|\varphi_n(\zeta_n)|=M_n$ et ζ_n' le point de la périphérie de Γ_n situé sur le même rayon de Γ_n que ζ_n (évidemment $\zeta_n'\neq\zeta_n$). ε_n étant un petit nombre positif ($\varepsilon_n<\frac{1}{2}M$) et z décrivant le segment $\zeta_n\zeta_n'$, supposons que $|\varphi_n(z)|$ atteint *pour la première fois* la valeur $M_n-\varepsilon_n$ au point ζ_n''. En vertu du lemme, il existe sur le segment ouvert $\zeta_n\zeta_n''$ un

*) Certaines parties de cette démonstration ont été présentées à la 100e séance de la Soc. Pol. de Math. (Section de Łódź) février, 1958) et à la II Conférence des Fonctions Analytiques (Lublin, septembre, 1958).

point t_n où $\varphi'(t_n) \neq 0$ et où $M_n - \varepsilon_n < |\varphi_n(t_n)| = q_n < M_n$ *). En vertu de la définition de la dérivée on a dans un entourage de t_n

$$(*) \qquad \varphi_n(z) = \varphi_n(t_n) + [\varphi'(t_n) + \varepsilon_n(z)]\,(z - t_n),$$

où $\varepsilon_n(z) \to 0$ lorsque $z \to t_n$, $\varphi^n{}_1(w)$ désignant la fonction inverse de $w = \varphi_n(z)$ (par „la fonction inverse" de $\varphi_n(z)$ en un point w on entend ici l'ensemble de toutes les valeurs $z \in \Gamma_n$ telles que $\varphi_n(z) = w$, $\varphi^n_{-1}(w)$ n'est pas en général uniforme mais elle est bien univalente).

(**) Supposons en premier lieu *qu'il existe un arc* $x_n y_n$ ($\arg x_n < w < \arg y_n$) *de la circonférence* $|w| = q_n$ *aux points duquel ne correspond aucune valeur de* $\varphi^n{}_1(w)$ (en d'autres termes $\varphi_n(w)$ ne prend pas dans Γ_n les valeurs de l'arc $x_n y_n$).

Désignons par X_n et Y_n respectivement les ensembles de toutes les valeurs de $\varphi^n{}_1(w)$ qui correspondent aux arcs fermés $q_n x_n$ et $y_n q_n$ (situés sur l'arc de la circonférence $|w| = q_n$ complémentaire à $x_n y_n$) respectivement. Les ensembles fermés X_n et Y_n ont le point commun t_n et il resulte de (*) que ces ensembles ont en t une "tangente" commune T (dans le voisinage de t_n X_n et Y_n sont contenus respectivement dans deux angles de sommets t_n symétriques par rapport à t_n et d'ouvertures arbitrairement petites ε). Il résulte d'autre part de (**) que t_n est le seul point commun de X_n et Y_n qui sont d'ailleurs contenus dans des cercles Γ'_n concentriques à Γ_n et de rayons $a|z_n|$ moindres que $|z_n|$ (car on a vu que dans les couronnes comprises entre Γ'_n et Γ_n $\varphi_n(z) \to 0$ lorsque $n \to \infty$).

D'après ce qui précède on pourrait donc tracer un contour C_n contenu à l'intérieur de Γ_n partant de t_n orthogonalement à T_n, revenant à t_n orthogonalement à T_n de l'autre côté de cette droite et ne rencontrant pas (sauf au point t_n) l'ensemble $X_n + Y_n$. Or, c'est impossible, car il resulte de (*) que sur l'un des deux arcs de C_n aboutissant à t_n on a, dans le voisinage de ce point, $|\varphi_n(z)| > q_n$ et sur l'autre arc de C_n on a, dans ce voisinage, $|\varphi_n(z)| < q_n$ tandis que $\varphi_n(z)$ est continue le long de C_n.

Le cas, ou la condition (**) n'est pas remplie se ramène facilement au cas précédent. En effet, si ζ_n est le point de Γ_n tel que $|\varphi_n(\zeta_n)| = M_n$, considérons une suite des constantes c_n qui tend vers 0 lorsque $n \to \infty$ et telle que $\arg c_n = \arg \varphi_n(\zeta_n)$ et remplaçons dans les raisonnements précédents $\varphi_n(z)$ par $\psi_n(z) = \varphi_n(z) + c_n$. Lorsque z décrit Γ_n, on a $\operatorname{Max}|\psi_n(z)| = M_n + |c_n|$. En choisissant les ε_n de manière que $\varepsilon_n < |c_n|$ on aura $M_n + |c_n| > q_n = |\psi(t_n)| > M_n + |c_n| - \varepsilon_n > M_n$.

Il en résulte l'existence d'un arc $x_n y_n$ de la circonférence $|w| = q_n$ dont les valeurs ne sont pas prises par $\psi_n(z)$ dans Γ_n.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY, PAN)

*) On peut évidemment supposer que $|\varphi_n(z)| M_n$ sur le segment ouvert $\xi_n \xi'_n$.

OUVRAGES CITÉS

[1] G. M. Adelson-Vielski et A. S. Kronrod, *Sur les lignes du niveau des fonctions continues ayant des derivées partielles* (en russe) DAN, **49** (1945), 239—241.

[2] — *Sur le principe du maximum pour les solutions d'un système d'équations du type elliptique* (en russe), DAN, **49** (1945), 559—561.

[3] — *Une démonstration directe d'analycité d'une fonction monogène* (en russe), DAN, **50** (1945), 7—10.

[4] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, Mc Graw Hill, New York, 1953.

[5] R. Plunkett, *A topological proof of the continuity of the derivative of a function of a complex variable*, Bull. Amer. Math. Soc. **65** (1959), 1—4.

[6] G. T. Whyburn, *Topological Analysis*, Princeton University Press, 1958.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys.—Vol. VIII, No. 1, 1960

MATHÉMATIQUE

Sur l'intégrale des fonctions univalentes

par

M. BIERNACKI

Présenté par A. MOSTOWSKI le 2 novembre 1959

Le but du présent ouvrage est d'établir le théorème suivant:

THÉORÈME. *Si* $f(z) = a_1 z + \ldots$ *est une fonction holomorphe et univalente dans le cercle* $|z| < R$, *alors la fonction*

$$g(z) = \int_0^z \frac{f(z)}{z}\, dz$$

est aussi univalente dans ce cercle.

Ce Théorème est connu dans le cas particulier où $f(z)$ est étoilée par rapport à l'origine: on sait que $g(z)$ est alors convexe *).

Dans la démonstration on peut supposer que $R = 1$. On sait que toute fonction $f(z)$ est alors étoilée par rapport à 0 dans le cercle $|z| \operatorname{tgh} \pi/4 = 0{,}65 \ldots$. Donc, si le Théorème n'était pas exact en général, il existerait un nombre r $(0{,}65 < r < 1)$ tel que toute fonction $g(z)$ serait univalente dans le cercle $|z| < r$, mais qu'il n'en serait plus toujours de même avec le cercle $|z| < r + \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit. On voit, à l'aide de la théorie des familles normales, qu'il existerait alors une fonction extrémale $f(z)$ telle que la fonction $g(z)$ correspondante serait univalente dans le cercle $|z| < r$, mais non plus dans un cercle $|z| < r + \varepsilon$, quelque petit que soit $\varepsilon > 0$. Il est clair qu'il devrait alors exister une valeur $z_0, |z_0| = r$ telle que $g'(z_0) = 0$, ce qui dans le cas actual n'est pas possible, ou bien il existerait deux valeurs, soit z_1 et z_2, telles que $|z_1| = |z_2| = r$ et $g(z_1) = g(z_2)$, c.à.d.

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{f(z)}{z}\, dz = 0. \tag{1}$$

$g(z)$ étant univalente dans le cercle $|z| < r$, on voit, en considérant l'image de la circonférence $|z| = r$ fournie par cette fonction, que l'on a $\arg f(z_2) =$

*) Le Théorème s'établit aussi facilement dans le cas particulier où tous les coefficients tayloriens de $f(z)$ sont réels.

$= \arg f(z_1) + \pi$. Nous allons écrire dans la suite pour abréger $f(z_2) = f_2$, $f(z_1) = f_1$. Nous supposerons maintenant que $f(z)$ subira une variation tout en restant dans la classe considérée et en même temps nous allons faire varier une des variables z_1 et z_2 par exemple, de manière que l'égalité (1) soit toujours remplie. Alors $|z_2|$ ne peut diminuer: dans le cas contraire, en effet, on pourrait faire varier *ultérieurement* z_1 et z_2 (sans changer $f(z)$) selon la formule obtenue en différentiant (1): $f_2\, dz_2/z_2 - f_1\, dz_1/z_1 = 0$ et un choix convenable de l'argument de dz_2 conduirait aux valeurs nouvelles $|z_1| < r$, $|z_2| < r$, en contradiction avec la définition de r.

Supposons d'abord qu'il existe un cercle K dont aucune valeur n'est prise par la fonction extrémale $f(z)$ dans le cercle $|z| < 1$. On peut alors appliquer ([3] p. 134) une „*variation exterieure*": si w est un point quelconque de K, la fonction

$$f^*(z) = f(z) + \frac{\lambda A [f(z)]^2}{f(z) - w} = a_1 z + \ldots$$

est (pour A quelconque et $\lambda > 0$ suffisamment petit) univalente dans le cercle $|z| < 1$. En remplaçant dans (1) $f(z)$ par $f^*(z)$ et en différentiant par rapport à z_2 on obtient la relation

$$\frac{f(z_2)}{z_2}\, dz_2 + \lambda A \int_C \frac{[f(z)]^2}{f(z) - w} \frac{dz}{z} = 0, \tag{2}$$

où C designe l'arc $z_1 z_2$ de la circonference $|z| = r$. L'intégrale de la formule (2) considérée comme fonction de w n'est pas identiquement nulle; on le voit en différentiant l'intégrale par rapport à w et en posant ensuite $w = 0$. On peut donc supposer, en remplaçant, s'il y a lieu, w par une valeur voisine, que cette intégrale n'est pas nulle. La formule (2) conduit alors, si l'on choisit convenablement l'argument de A, à une diminution de $|z_2|$. Or, nous avons déja constaté que cela n'est pas possible. Ainsi donc, *la fonction extrémale $f(z)$ représente le cercle $|z| < 1$ sur un domaine dépourvu de points extérieurs.*

On pourra maintenant utiliser des „*variations interieures*" introduites en 1943 par M. Schiffer ([4], [3], p. 135). D'après cet auteur, u étant un point quelconque du cercle $|z| < 1$, ($\lambda > 0$ est suffisamment petit et A est un nombre complexe arbitraire) une fonction qui peut s'écrire

$$f^*(z) = f(z) + \frac{\lambda A [f(z)]^2}{f(z) - f(u)} - \lambda A f(z) \left| \frac{f(w)}{u f(u)} \right|^2 - \lambda A z f'(z) \left| \frac{f(u)}{u f'(u)} \right|^2 \frac{u}{z - u} +$$

$$+ \bar{\lambda} \bar{A} z f'(z) \left[\frac{\overline{f(u)}}{\bar{u} \overline{f'(u)}} \right]^2 \frac{\bar{u} z}{1 - \bar{u} z} + O(\lambda^2)$$

est aussi univalente dans le cercle $|z| < 1$. Puisque A est arbitraire, on peut le remplacer par $A\,[u f'(u)/f(u)]^2$. En remplaçant ensuite dans (1)

$f(z)$ par $f^*(z)$ et en différentiant en même temps le premier membre de (1) par rapport à z_2 on obtient la relation

$$\frac{dz_2}{z_2} + \lambda AP + \lambda \bar{A} Q + O(\lambda^2) = 0, \tag{3}$$

où on a posé

$$P = \frac{u^2 [f'(u)]^2}{f_2 f(u)} \int_C \frac{f(z)}{f(z) - f(u)} \frac{dz}{z} - \frac{1}{f_2} \int_C \frac{u f'(z)}{z - u} dz,$$

$$Q = \frac{1}{f_2} \int_C f'(z) \frac{\bar{u} z}{1 - \bar{u} z} dz \; ^*).$$

Si l'on avait $|P| \neq |Q|$ un choix convenable de l'argument de A entrainerait d'après (3), λ étant suffisamment petit, une diminution de $|z_2|$, ce qui n'est pas possible. On a donc $|P| = |Q|$. De plus, on doit avoir $\mathcal{R}(AP + \bar{A}Q) = \mathcal{R}[A(P + Q)] = 0$, car autrement on pourrait choisir $\arg A$ de manière que cette partie réelle soit positive et il en résulterait encore d'après (3) une diminution de $|z_2|$. A étant arbitraire, on a donc $P + Q = 0$, c.à.d.

$$\frac{u^2 [f'(u)]^2}{f_2 f(u)} \int_C \frac{f(z)}{f(z) - f(u)} \frac{dz}{z} + \frac{1}{f_2} \int_C \frac{u f'(z)}{u - z} dz + \frac{1}{f_2} \int_C \frac{\bar{z} f'(\bar{z})}{\left(\frac{1}{u} - \bar{z}\right)} d\bar{z} = 0. \tag{4}$$

Si l'on considère dans (4) les valeurs de $f(z)$ le long de C comme données, (4) est une équation différentielle de la forme $f'(u) = \Phi[u, f(u)]$, où Φ est une fonction analytique de ses arguments, pourvu que u n'appartienne pas a l'arc C ou a l'arc C_1 obtenu de C par l'inversion. Il résulte alors de la théorie analytique des équations différentielles que $f(z)$ est analytique même sur la circonférence $|z| = 1$ (cf. p. ex. [1], p. 21 et [2], p. 75), $f(z)$ *représente donc le cercle* $|z| < 1$ *sur le plan entier muni d'un nombre fini de coupures analytiques qui s'étendent vers l'infini.*

Considérons en particulier une valeur de u ($|u| = 1$) qui correspond au bout d'une coupure. On a $f'(u) = 0$, donc d'après (4):

$$\mathcal{R}\left[\frac{1}{f_2} \int_C \frac{u f'(z)}{u - z} dz + \frac{1}{f_2} \int_C \frac{z f'(z)}{\frac{1}{\bar{u}} - z} dz\right] = 0$$

ou, en tenant compte de ce que $u \cdot \bar{u} = 1$,

$$\mathcal{R}\left[\frac{1}{f_2} \int_C \frac{u + z}{u - z} f'(z) dz\right] = 0 \quad \text{c.à.d.} \quad \mathcal{R}\left[\frac{1}{f_2} \int_C \frac{u^2 - z^2}{(u - z)^2} f'(z)\right] = 0.$$

*) On a $\int_C \frac{[f(z)]^2}{f(z) - f(u)} \frac{dz}{z} = f(u) \int_C \frac{f(z)}{f(z) - f(u)} \frac{dz}{z}$ car $\int_C \frac{f(z)}{z} dz = 0.$

Il en résulte que

$$\mathcal{R}\left[\frac{1}{f_2}\int_C \frac{2z^2-2uz}{(u-z)^2}f'(z)\,dz\right]=\frac{1}{f_2}\int_C \frac{u^2+z^2-2uz}{(u-z)^2}f'(z)\,dz=\frac{f_2-f_1}{f_2},$$

c.à.d.

$$\mathcal{R}\left[\frac{1}{f_2}\int_C \frac{z}{u-z}f'(z)\,dz\right]=-\frac{(f_2-f_1)}{2f_2}. \tag{5}$$

Cette formule nous sera utile dans la suite.

Nous allons appliquer maintenant une formule variationnelle établie récemment par A. W. Goodman ([5], p. 289, la formule (3.10)).

D'après cette formule une fonction qui peut s'écrire

$$f^{**}(z)=f(z)-\lambda A\frac{3f(u)[f(z)]^2-2[f(z)]^3}{f(u)[f(u)-f(z)]^2}+$$

$$+\lambda Azf'(z)\left[I_1(u)\frac{3uz-2z^2}{(u-z)^2}+I_2(u)\frac{z}{u-z}+2\mathcal{R}\,I_1(u)+\mathcal{R}\,I_2(u)\right]+$$

$$+\bar{A}\lambda zf'(z)\left[I_1(u)\frac{\bar{u}z-2\bar{u}^2z^2}{(1-\bar{u}z)^2}+I_2(u)\frac{\bar{u}z}{1-\bar{u}z}\right]+O(\lambda^2)$$

où

$$I_1(u)=\frac{[f(u)]^2}{[uf'(u)]^3},\qquad I_2(u)=\frac{2f''(u)[f(u)]^2}{u^2[f'(u)]^4}$$

(u est un point quelconque du cercle $|z|<1$, $\lambda>0$ et assez petit, A — arbitraire) est aussi univalente dans le cercle $|z|<1$. On a, d'ailleurs, $f^{**}(0)=0$. En remplaçant A par $A/I_1(u)$ on déduit de cette formule exactement de la même manière que dans le cas de la formule des M. Schiffer, l'équation

$$\begin{cases} -\left[\dfrac{uf'(u)}{f(u)}\right]^3\dfrac{1}{f_2}\displaystyle\int_C \frac{3f(u)[f(z)]^2-2[f(z)]^3}{[f(u)-f(z)]^2}\frac{dz}{z}+ \\ +\dfrac{1}{f_2}\displaystyle\int_C f'(z)\left[\frac{3uz-2z^2}{(u-z)^2}+\frac{2uf''(u)}{f'(u)}\frac{z}{u-z}\right]dz+ \\ +\dfrac{1}{\bar{f}_2}\displaystyle\int_C \overline{f'(z)}\left[\frac{u\bar{z}-2u^2\bar{z}^2}{(1-u\bar{z})^2}+\frac{2uf''(u)}{f'(u)}\cdot\frac{u\bar{z}}{1-u\bar{z}}\right]d\bar{z}+ \\ +\dfrac{2(f_2-f_1)}{f_2}\dfrac{[uf'(u)]^3}{[f(u)]^2}\,\mathcal{R}\left[\dfrac{[f(u)]^2}{[uf'(u)]^3}+\dfrac{f''(u)[f(u)]^2}{u^2[f'(u)]^4}\right]=0 \end{cases} \tag{6}$$

qui est valable aussi sur la circonference $|u|=1$.

Soit u_0 ($|u_0|=1$) la valeur de u qui correspond au bout d'une coupure dans l'image de $|z|<1$ fourni par $f(z)$. Posons

$$\alpha = \lim_{u \to u_0} \arg \frac{u^2 [\bar{f}'(u)]^4}{[f(u)]^2 \bar{f}''(u)} + \frac{\pi}{2},$$

où $|u|=1$ et où „lim" signifie une valeur quelconque des valeurs-limites de l'argument en question et considérons la fonction

$$\varphi(z) = e^{-i\alpha} f(e^{i\alpha} z)$$

qui est en même temps que $f(z)$ extremale dans notre problème. On a

$$\frac{\varphi''(ue^{-i\alpha})\,[\varphi(ue^{-i\alpha})]^2}{(ue^{-i\alpha})^2\,[\varphi'(ue^{-i\alpha})]^4} = e^{i\alpha} \cdot \frac{f''(u)\,[f(u)]^2}{u^2\,[f'(u)]^4}. \tag{7}$$

Au bout d'une coupure de l'image fournie par $\varphi(z)$ correspond la valeur $v_0 = u_0 e^{i\alpha}$ de z. Lorsque $u \to u_0$ ($|u|=1$) par des valeurs convenables l'argument de l'expression (7) tend, vu la définition de α, vers π 2. Considérons maintenant l'équation (6) dans laquelle $f(z)$ est remplacée par $\varphi(z)$ et l'arc de cercle C par l'arc C', déduit de C par une rotation de l'angle α autour de l'origine. Il est clair que si $u \to v_0$, $\varphi'(u) \to 0$, tous les termes de (6) restent bornés sauf peut-être les suivants:

$$\frac{2u\varphi''(u)}{\varphi'(u)}\left[\frac{1}{\varphi_2}\int_{C'} \frac{z\varphi'(z)}{u-z}dz + \frac{1}{\bar{\varphi}_2}\int_{C'} \frac{u\bar{z}\,\varphi'(z)}{1-u\bar{z}}dz\right] + \tag{8}$$

$$+ \frac{2(\varphi_2-\varphi_1)}{\varphi_2} \frac{[u\varphi'(u)]^3}{[\varphi(u)]^2} \mathcal{R}\left\{\frac{\varphi''(u)\,[\varphi(u)]^2}{u^2\,[\varphi'(u)]^4}\right\}.$$

Or, la partie réelle du premier paranthèse de (8) est égale, lorsque $|u|=1$, à

$$2\mathcal{R}\left[\frac{1}{\varphi_2}\int_{C'} \frac{z\varphi'(z)}{u-z}dz\right].$$

Lorsque $u \to v_0$ cette expression tend d'après (5) vers $-(\varphi_2-\varphi_1)/\varphi_2$. Ainsi donc, lorsque $u \to v_0$, le premier terme de (8) reste supérieur ou égal en module à

$$Z = \frac{2u\varphi''(u)}{\varphi'(u)} \frac{\varphi_2-\varphi_1}{\varphi_1}(1-\varepsilon)$$

(ε est arbitrairement petit).

D'autre part, en remplaçant dans le second terme de (8) l'expression sous signe R par son module on obtient un nombre de même module que $z\,1-\varepsilon$. Or, si $u \to v_0$, l'argument de l'expression sous signe $\mathcal{R}$ tend

vers $\pi/2$, donc le rapport du module du second terme de (8) au molude de Z tend vers zéro. Lorsque $u \to v_0$ le module de Z augmente visiblement indefiniment car $\varphi'(v_0) = 0$ et $\varphi''(v_0) \neq 0$. Ainsi donc lorsque $u \to v_0$, le premier membre de (6) augmente indéfiniment, nous obtenons donc une contradiction.

INSTITIT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY, PAN)

OUVRAGES CITÉS

[1] V. V. Goloubieff, *Leçons sur la théorie analytique d'équations différentielles* (en russe), Moscou—Leningrad, 1941.

[2] G. M. Golouzine, *Quelques problèmes de la théorie des fonctions univalentes* (en russe), Trudy Inst. im. Stiekłowa, **27** (1949).

[3] — ,*Théorie géométrique des fonctions d'une variable complexe* (en russe), Moscou—Leningrad, 1952.

[4] M. Schiffer, *Variation of the Green function and the theory of the p-valued functions*, Amer. Journ. Math., **65** (1943), 341—360.

[5] A. W. Goodman, *On variation formulas for univalent functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **89** (1958), 285—294.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys.—Vol. VIII, No. 1, 1960

MATHÉMATIQUE

La non-existence des fonctionnelles linéaires continues non-nulles sur l'espace des opérateurs de J. Mikusiński

par

CIPRIAN FOIAŞ

Présenté par K. KURATOWSKI le 11 novembre 1959

Soit $\mathfrak{M}$ le corps *) des quotients formels**) de l'anneau $\mathfrak{M}_0$ (sans diviseurs de zéro) des fonction numériques continues définies sur $[0, \infty)$, où la multiplication est donnée par $f * g(x) = \int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt$, $0 < x < +\infty$. D'après J. Mikusiński [3], $f_n/g_n \to f/g$ dans $\mathfrak{M}$, si $f_n * g_n = f_n/g'$, $f/g = f'/g'$ et $f_n(x) \to f'(x)$ uniformément sur tout compact de $[0, \infty)$. Le but de cette note est de démontrer le théorème suivant:

Il n'existe pas de fonctionnelles linéaires continues sur $\mathfrak{M}$ qui ne soient pas identiquement nulles.

Ce fait ***) n'empêche pas l'introduction des distributions à valeurs vectorielles (de $\mathfrak{M}$) [4], mais il montre que pour leur définition on ne peut pas utiliser la théorie des fonctionnelles.

Passons maintenant à la démonstration du théorème.

Soit F une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathfrak{M}$. Pour $0 \neq g \in \mathfrak{M}_0$ fixé, posons

$$F_g(f) = F\left(\frac{f}{g}\right) \quad (f \in \mathfrak{M}_0). \tag{1}$$

La fonctionnelle F_g est linéaire sur $\mathfrak{M}_0$. Elle est aussi continue si l'on munit $\mathfrak{M}_0$ de la topologie de convergence uniforme sur les compacts de $[0, \infty)$. Par conséquent, il existe, pour tout g, une (et une seule) fonction à variation bornée $\mu(x; g)$, continue à gauche, constante à partir d'un $x = x_g$ assez grand, telle que $\mu(0; g) = 0$ et

$$F_g(f) = \int_0^\infty f(x)\, d\mu(x; g) \qquad (f \in \mathfrak{M}_0). \tag{2}$$

*) Introduit et étudié par J. Mikusiński dans [1] — [3].

**) Appelés „opérateurs" par J. Mikusiński.

***) Supposé déja par J. Mikusiński et d'autres mathématiciens.

Pour tout $0 \neq h \in \mathfrak{M}_0$, on a $g * h \neq 0$ et $(f * h/g * h) = f/g$. En tenant compte de (1) et (2), il vient

$$(3) \quad \int_0^\infty f(x)\, d\mu(x; g) = F_g(f) = F\left(\frac{f}{g}\right) = F\left(\frac{f * h}{g * h}\right) = F_{g*h}(f * h) = \int_0^\infty f * h(x)\, d\mu(x; g * h).$$

L'égalité (3) a lieu, quels que soient $0 \neq g$, $h \in \mathfrak{M}_0$ et $f \in \mathfrak{M}_0$.

En posant $h \equiv 1$ dans (3) on obtient

$$(4) \quad \int_0^\infty f(x)\, d\mu(x; g) = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(t)\, dt\right] d\mu(x; g * 1) \qquad (f \in \mathfrak{M}_0).$$

Soit $\{f_n\} \in \mathfrak{M}_0$ une suite telle que $|f_n| \leq 1$, $f_n(x) \to \varphi_{[0,y)}(x)$, $x \in [0, \infty]$, où $\varphi_{[0,y)}(x)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, y)$. Alors il vient de (4), en vertu du théorème de Lebesque,

$$\int_0^\infty \varphi_{[0,y]}(x)\, d\mu(x; g) = \int_0^\infty \left[\int_0^x \varphi_{[0,y]}(t)\, dt\right] d\mu(x; g * 1),$$

d'où (en intégrant par parties)

$$\mu(y; g) = \int_0^y x\, d\mu(x; g * 1) + y \int_y^\infty d\mu(x; g * 1) =$$

$$= y\mu(y; g * 1) - \int_0^y \mu(x; g * 1)\, dx + y\,[\mu(\infty; g * 1) - \mu(y; g * 1)] =$$

$$= y\mu(\infty;\ g * 1) - \int_0^y \mu(x; g * 1)\, dx \qquad (0 \leqslant x < \infty,\quad g \in \mathfrak{M}_0).$$

Il s'ensuit que $\mu(x; g)$ est continue, quel que soit $0 \neq g \in \mathfrak{M}_0$. Donc, $\mu(\mu; g * 1)$ l'est aussi, ce qui entraîne que $\mu(x; g)$ est aussi continûment dérivable. On a

$$(5) \quad \frac{d\mu(x; g)}{dx} = \mu(\infty; g * 1) - \mu(x; g * 1) \qquad (0 \leqslant x < \infty,\ 0 \neq g \in \mathfrak{M}_0).$$

Posons généralement

$$(6) \quad \nu(x; g) = \frac{d\mu(x; g)}{dx}.$$

Alors il résulte de (5) que $\nu(x; g)$ est une fonction à support compact continûment dérivable et que

$$\frac{d\nu(x; g)}{dx} = -\nu(x; g * 1) \qquad (0 \leqslant x < \infty, 0 \neq g \in \mathfrak{M}_0).$$

De cette égalité on déduit par récurrence que $\nu(x; g)$ est une fonction indéfiniment dérivable à compact dans $[0, \infty]$.

En vertu de la définition (6), la relation (3) devient

$$(7)\qquad \int_0^\infty f(x)\,\nu(x;g)\,dx = \int_0^\infty f*h(x)\,\nu(x;g*h)\,dx \qquad (0\neq g, h\in\mathfrak{M}_0\, f\in\mathfrak{M}_0).$$

En changeant l'ordre d'intégration dans le second membre, il vient

$$\int_0^\infty f(x)\,\nu(x;g)\,dx = \int_0^\infty f(x)\Big[\int_x^\infty h(t-x)\,\nu(t;g*h)\,dt\Big]\,dx$$

quel que soit $f\in\mathfrak{M}_0$. Il s'ensuit que

$$(8)\qquad \nu(x;g) = \int_x^\infty h(t-x)\,\nu(t;g*h)\,dt \qquad (0\neq h\in\mathfrak{M}_0)$$

pour $0\leqslant x<\infty$.

Soit $0\neq h\in\mathfrak{M}_0$ une fonction intégrable sur $[0,\infty]$; alors on déduit de (8) que

$$(9)\qquad \int_0^\infty e^{-i\xi}\,\nu(x;g)\,dx = \int_0^\infty e^{i\xi x}h(x)\,dx \int_0^\infty e^{-i\xi x}\,\nu(x;g*h)\,dx$$

pour $-\infty<\xi<+\infty$.

Supposons que $\nu(x;g)=0$. Alors, en tenant compte de (9) et du fait que $\nu(x;g)$ et $\nu(x;g*h)$ sont à support compact, on conclût que la fonction

$$\int_0^\infty e^{i\xi x}h(x)\,dx$$

est la restriction à $(-\infty,+\infty)$ d'une fonction méromorphe. Ce résultat, obtenu pour toute fonction $h(x)$ continue et intégrable sur $[0,+\infty]$, est évidemment faux p. ex. pour $h(x)=e^{-x}$ | x. Cette contradiction prouve que $\nu(x;g)=0$, quel que soit $0\neq g\in\mathfrak{M}_0$. En vertu de (6), (2) et (1) on a donc $F(f\,g)=0$ quel que soit $0\neq(f\,g)\in\mathfrak{M}$, ce qui achève la démonstration.

Je tiens à remercier M. J. Mikusiński de m'avoir suggéré le présent ouvrage.

INSTITUTUL DE MATEMATICA, ACADEMIA R. P. R., BUCAREST

OUVRAGES CITÉS

[1] J. Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Math., **11** (1949), 41—70.

[2] — *Sur les équations différentielles du calcul opératoire et leurs applications aux équations classiques aux dérivées partielles*, Studia Math., **12** (1951), 227—270.

[3] — *Operational Calculus*, Pergamon Press, London 1959.

[4] — *Dibstributions vectorielles à valeurs dans les réunions d'espaces de Banach*, (à paraître dans Studia Math.).

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys.—Vol. VIII, No. 1, 1960

MATHEMATICS

On the Comparability of Dendrites

by

S. TARKOWSKI

Presented by K. KURATOWSKI on November 19, 1959

It is the purpose of this paper to announce a theorem, the corollary of which resolves a problem independently raised by K. Borsuk, P. Erdös and B. Knaster.

The proofs will be published in Fundamenta Mathematicae.

A set X is said to be *partially ordered* by the relation $\leqslant$, called a *partial ordering* of X, if (a) $x \leqslant x$, (b) $x_1 \leqslant x_2$ and $x_2 \leqslant x_1$ imply $x_1 = x_2$ and (c) $x_1 \leqslant x_2$ and $x_2 \leqslant x_3$ imply $x_1 \leqslant x_3$ for every $x, x_1, x_2, x_3 \in X$. Two elements x_1, x_2 of X are called *comparable* by the relation $\leqslant$ if $x_1 \leqslant x_2$ or $x_2 \leqslant x_1$. A subset Y of X is called *linear*, if it is totally ordered by the relation $\leqslant$, i.e. every two elements of Y are comparable. A subset Y of X is called *connected*, if the conditions $y_1 \leqslant x \leqslant y_2$ and $y_1, y_2 \in Y$ imply $x \in Y$.

A partially ordered set X is called *partially well-ordered* (PWO) if the two following conditions are satisfied:

(i) every linear subset of X is well-ordered in an increasing sequence,

(ii) every infinite subset of X contains two comparable elements.

It is easy to see that the property PWO is equivalent to the following property: there exist for every infinite sequence $\{x_i\}$ of elements of X ($i = 1, 2, \ldots$) two indices i, j such that $i < j$ and $x_i \leqslant x_j$ ([2], p. 222).

For arbitrary sets X, Y a function $F\colon X \to Y$ is said to be a *multi-valued mapping*, if $F(x)$ is a subset of Y for each $x \in X$. We write $F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x)$ for $A \subset X$. A (one-valued) mapping $f\colon X \to Y$ is said to be a *selection* of F if $f(x) \in F(x)$ for each $x \in X$.

For two partially ordered sets X and Y (with partial orderings $\leqslant_1$ and $\leqslant_2$ respectively) a 1-1 mapping $i\colon X \to Y$ is called an *isomorphism* (in the relations $\leqslant_1$ and $\leqslant_2$), if $x_1 \leqslant_1 x_2$ is equivalent to $i(x_1) \leqslant_2 i(x_2)$ for every $x_1, x_2 \in X$. A multi-valued mapping $I\colon X \to Y$ is called *) a *multi-valued isomorphism* (in the relations $\leqslant_1$ and $\leqslant_2$) if:

*) This definition of multi-valued isomorphism is due to A. Lelek.

1° $I(x)$ is linear for each $x \in X$,

2° $I(X)$ is connected and

3° each selection of I is an isomorphism (in the relations $\leqslant_1$ and $\leqslant_2$).

Let $\mathcal{R}$ be a fixed partially ordered set with partial ordering $\prec$. A system $\langle X, \leqslant, <\cdot, \varphi\rangle$ is called a *$\mathcal{R}$-tree* ("an oriented tree with a valuation in $\mathcal{R}$") if:

(I) X is a finite set,

(II) $\leqslant$ is a partial ordering of X with the property that every set of the form $\{\xi: \xi \in X, \xi \leqslant x\}$ is linear (for each $x \in X$) and there exists the smallest element x_0 in X, i. e. such that $x_0 \leqslant x$ for each $x \in X$ (therefore X with the relation $\leqslant$ forms a so-called finite tree),

(III) $<\cdot$ is a partial ordering of X, called *) an *orientation's relation* in X, with property that two elements of X are comparable by the relation $<\cdot$ if and only if they are not comparable by the relation $\leqslant$ and

(IV) φ is a mapping of X into $\mathcal{R}$.

We define a partial ordering $\prec_R$ of the class $\boldsymbol{T}(\mathcal{R})$ of all $\mathcal{R}$-trees: if $T_1 = \langle X_1, \leqslant_1, <\cdot_1, \varphi_1\rangle$ and $T_2 = \langle X_2, \leqslant_2, <\cdot_2, \varphi_2\rangle$ then

$$T_1 \prec_R T_2$$

means that there exist a multi-valued isomorphism (in the relations $\leqslant_1$ and $\leqslant_2$) $I: X_1 \to X_2$ and a selection $i: X_1 \to X_2$ of I such that:

(1) i is an isomorphism in the relations $<\cdot_1$ and $<\cdot_2$, and

(2) $\varphi_1(x) \prec \varphi_2[i(x)]$ for each $x \in X$.

Two $\mathcal{R}$-trees T_1 and T_2 are regarded as identical if $T_1 \prec_R T_2$ and $T_2 \prec_R T_1$.

The main result is the following

THEOREM. *If $\mathcal{R}$ is* PWO, *then $\boldsymbol{T}(\mathcal{R})$ is* PWO.

A special case of this theorem was proved by G. Higman in [3]. It states that if $\mathcal{R}$ is PWO and $\boldsymbol{T}_0(\mathcal{R})$ is the class of all $\mathcal{R}$-trees $\langle X, \leqslant, <\cdot, \varphi\rangle$ in which X is (totally) linear with the partial ordering $\leqslant$, then $\boldsymbol{T}_0(\mathcal{R})$ is PWO. Some generalizations of the theorem of Higman in a direction different than ours were given by P. Erdös and R. Rado in [2].

The conclusion that if $\mathcal{R}$ is PWO then the condition (i) holds for $\boldsymbol{T}(\mathcal{R})$ is rather obvious and only the condition (ii) for $\boldsymbol{T}(\mathcal{R})$ is the difficult conclusion of the theorem.

Let us note the following corollary of a geometrical and topological character.

Let $T_1, T_2, \ldots$ be a sequence of finite trees in the oriented plane. That is T_i is a dendrite with a finite set of ramification points and finite set of end points, and one end point of T_i is distinguished — the beginning of the tree. Let b_i be the beginning point of T_i.

*) The notion of orientation's relation $<\cdot$ is due to J. Mycielski.

COROLLARY. *There exist two trees* $T_i, T_j (i \neq j)$ *in the sequence* $\{T_i\}$ *and a homeomorphism* h *of the plane onto itself preserving the orientation and such that* $h(b_i) = b_j$ *and* $h(T_i) \subset T_j$.

Therefore there is only finite number of finite dendrites which are mutually incomparable in sense of Borsuk ([1], p. 322). K. Sieklucki proved that it is not true for infinite dendrites ([4], p. 333). Let us note that it is not true also for finite graphs: there exists an infinite sequence $\{G_i\}$ of finite graphs, any of which does not contain a homeomorphic image of any of others. Every point of G_i is a point of a ramification at most 4 in $G_i (i = 1, 2, ...)$.

The following problem (communicated to me by P. Erdös) remains unsolved: *does an infinite sequence* $\{G_i\}$ *of finite graphs exist such that every point of* G_i *is a point of a ramification at most* 3 *in* $G_i (i = 1, 2, ...)$ *and that any* G_i *does not contain a homeomorphic image of any* $G_j (i \neq j)$?

INSTITUTE OF MATHEMATICS, WROCŁAW, UNIVERSITY
(INSTYTUT MATEMATYCZNY, UNIWERSYTET, WROCŁAW)

REFERENCES

[1] K. Borsuk, *Concerning the classification of topological spaces from the stand-point of the theory of retracts*, Fund. Math., **46** (1959), 321—330.

[2] P. Erdös and R. Rado, *A theorem on partial well-ordering of sets of vectors*, Journ. London Math. Soc., **34** (1959), 222—224.

[3] G. Higman, *Ordering by divisibility in abstract algebra*, Proc. London Math. Soc., **2** (1952), 326—336.

[4] K. Sieklucki, *On a family of power* $\mathfrak{c}$ *consisting of* $\mathfrak{c}$ *uncomparable dendrites*, Fund. Math., **46** (1959), 331—335.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys.—Vol. VIII, No. 1, 1960

MATHÉMATIQUE

Sur une extension du procédé de I. Jungermann pour établir la convergence des approximations successives au cas des équations différentielles ordinaires

par

T. WAŻEWSKI

Présenté le 20 novembre 1959

1. Le Théorème 1 (dont nous donnons le texte ci-dessous au paragraphe **4**), concernant l'existence de la limite (4,6) a été énoncé et démontré par I. Jungermann (postérieurement Mme I. Mathison) avant la deuxième guerre mondiale. Ce théorème bien connu depuis, a été démontré par elle sans avoir recours au lemme d'Arzela (sur les suites bornées de fonctions également continues) contrairement à la plupart des démonstrations conçues par d'autres auteurs (cf. p. ex. [1]). Ledit théorème ainsi qu'un théorème énoncé par moi-même sur un autre type d'approximations successives ont été signalés (sans démonstration) dans la note [2].

Le but de la présente communication est de montrer que l'on peut, d'une façon tout-à-fait simple, arriver à une extension du procédé employé par I. Jungermann au cas des équations différentielles traitées dans un espace complet de Banach (voir Théorème 2).

Pour faire ressortir d'une façon plus lisible le mode de transition de la démonstration du Théorème 1 à celle du Théorème 2 nous allons tout d'abord présenter ici la démonstration (non publiée jusqu'ici) du Théorème 1 donnée par I. Jungermann.

2. HYPOTHÈSE H_1. *$h(t, x)$ est une fonction réelle des variables réelles, continue dans la demi-bande* $P: 0 \leqslant t \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant +\infty$.

On a, de plus,

$$h(t, x) \leqslant h(t, y) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x < y,\ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$h(t, 0) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$0 \leqslant h(t, x) \leqslant M < +\infty.$$

L'équation

$$x'(t) = h(t, x(t)) \tag{2.1}$$

admet $x(t) \equiv 0$ comme solution unique issue du point $(0, 0)$.

HYPOTHÈSE H_2. *$f(t,x)$ est une fonction réelle des variables réelles, continue dans la bande Q: $0 \leqslant t \leqslant 1$, $-\infty < x < +\infty$. On a dans Q:*

$$|f(t,x)| \leqslant M < +\infty, \tag{2.2}$$

$$|f(t,x) - f(t,y)| = h(t, |x-y|). \tag{2.3}$$

Remarque. 1. Pour ne pas introduire des complications inutiles nous nous bornons dans la suite au cas d'une seule équation

$$x' = f(t,x). \tag{2.4}$$

3. LEMME 1. *Admettons l'Hypothèse H_1 et posons*

$$c_0(t) = Mt, \tag{3.1}$$

$$c_{n+1}(t) = \int_0^t h(t, c_n(t))\,dt. \tag{3.2}$$

Nous affirmons que

$$0 \leqslant c_{n-1}(t) \leqslant c_n(t), \qquad (n \geqslant 0, 0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{3.3$_n$}$$

$$c_n(t) \to 0 \tag{3.4}$$

et que cette convergence est uniforme. Désignons, en plus, par $v_n(t)$ l'intégrale supérieure, issue du point $(0,0)$, de l'équation

$$x' = 2h(t, c_{n-1}(t)) + h(t,x). \tag{3.5}$$

Nous affirmons que dans l'intervalle $[0,1]$ a lieu la convergence uniforme

$$v_n(t) \to 0. \tag{3.6}$$

Démonstration. On obtient (3.3$_n$) par l'induction mathématique. Il en résulte que $c_n(t) \to c(t)$, $c(0) = 0$. Le passage à la limite dans (3.2) prouve que $c(t)$ constitue une intégrale issue du point $(0,0)$ de (2.1) et en raison de l'unicité admise pour (2.1) elle est identiquement nulle. Donc, (3.4) est vrai.

Le deuxième membre de l'équation (3.5) tend dans P uniformément vers le deuxième membre $h(t,x)$ de l'équation (2.1). Il en résulte que la convergence uniforme (3.6) a lieu, car la fonction identiquement nulle constitute une solution unique issue de (0,0) de l'équation limite (2.1) (cf. [3], p. 143).

4. THÉORÈME 1. *En admettant les Hypothèses H_1 et H_2 et en utilisant les notations du lemme précédent nous posons*

$$x_0(t) = 0, \qquad x_{n+1} = \int_0^t f(t, x_n(t))\,dt \tag{4.1}$$

$$x'_{n+1}(t) = f(t, x_n(t)), \qquad x_{n+1}(0) = 0. \tag{4.2}$$

Cela étant admis nous affirmons que:

$$(4.3_n) \qquad |x_{n+1} - x_n| \leqslant c_n(t), \qquad (n \geqslant 0),$$

$$(4.4_n) \qquad |x'_{n+1} - x'_n| = h(t, c_{n-1}(t)), \qquad (n \geqslant 1),$$

$$(4.5_n) \qquad |x_n(t) - x_m(t)| \leqslant v_n(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant n \leqslant m, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

La suite $x_n(t)$ est uniformément convergente dans $[0, 1]$:

$$(4.6) \qquad x_n(t) \to p(t).$$

On a

$$(4.7) \qquad |x_n(t) - p(t)| \leqslant v_n(t) \qquad (0 \leqslant n, 0 \leqslant t \leqslant 1),$$

$$(4.8) \qquad p'(t) \equiv f(t, p(t)) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1), p(0) = 0.$$

Démonstration. En partant de l'inégalité (4.3_0) (facile à vérifier) et en s'appuyant sur (4.1), (2.3), (3.2), (3.3_n) et aussi sur le fait de la croissance de $h(t, x)$ par rapport à x on établit de proche en proche les inégalités (4.3_n). De (4.2), (2.3) et (4.3_n) on déduit les inégalités (4.4_n).

Soit $1 \leqslant n \leqslant m$. On a évidemment

$$|x'_n - x'_m| \leqslant |x'_n - x'_{n-1}| + |x'_m - x'_{m-1}| + |x'_{n+1} - x'_{m+1}|.$$

En vertu de (4.4_n) et (3.3_n) nous avons

$$|x'_n - x'_{n+1}| + |x'_m - x'_{m+1}| \leqslant h(t, c_{n-1}(t)) + h(t, c_{m-1}(t)) \leqslant 2h(t, c_{n-1}(t)),$$

$$|x'_{n+1} - x'_{m+1}| = |f(t, x_n) - f(t, x_m)| \leqslant h(t, |x_n - x_m|).$$

Nous avons (cf. [3]) $D_+ |x_n - x_m| \leqslant |x'_n - x'_m|$ où D_+ désigne la dérivation unilatérale à droite. On obtient des quatre inégalités précédentes pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $n \geqslant 1$,

$$D_+ |x_n - x_m| \leqslant 2h(t, c_{n-1}(t)) + h(t, |x_n - x_m|).$$

Comme pour $t = 0$ on a $|x_n - x_m| = 0$, il s'ensuit, en vertu d'un théorème sur les inégalités différentielles (cf. p. ex. [3] ou [4]), que (4.5_n) a lieu. La relation (4.6) résulte de (4.5_n) et (3.6). De (4.6) et (4.1) résulte (4.8). Nous obtenons (4.7) de (4.5_n) par un passage à la limite.

5. Hypothèse H_3. *Nous admettons maintenant que B est un espace linéaire complet de Banach à norme homogène. Nous définissons maintenant la bande Q comme produit cartésien $[0,1] \times B$ Nous admettons que les valeurs de f appartiennent à B et que, dans Q, f est continue et satisfait aux inégalités* (2.2) et (2.3).

Théorème 2. *Admettons les Hypothèses H_1 et H_3 et définissons les approximations successives par les relations* (4.1) *Ceci posé, la thèse du Théorème 1 reste vraie, c.à.d. les six relations* (4.3_n) — (4.8) *ont lieu.*

Démonstration. La démonstration du Théorème 1 peut être appliquée textuellement lorsque l'on tient compte des lemmes suivants.

LEMME 2. *Soit $k(t,x)$ une fonction réelle des variables réelles continue, bornée et non négative dans la demi-bande P et soit $x=w(t)$ l'intégrale supérieure issue de l'origine de l'équation $x'=k(t,x)$. Soit $x=z(t)$ une fonction continue, non négative, dans $[0,1]$ telle que $z(0)=0$ et admettons que*

$$\Delta_+ z(t) \leqslant k(t,z(t)) \quad \text{dans} \quad [0,1],$$

où le premier membre désigne le nombre dérivé supérieur à droite de $z(t)$.

Ceci posé, on a $z(t) \leqslant w(t)$ dans $[0,1]$. (Pour la démonstration de ce lemme voir [4]).

LEMME 3. *Soit $g(t)$ une fonction aux valeurs situées dans l'espace B, dérivable dans $[0,1]$. On a alors $\Delta_+ |g(t)| \leqslant |g'(t)|$ dans $[0,1]$.*

Ce lemme est presque évident.

Remarque 2. L'inegalité (4.7) montre que le Théorème 1 se prête aux calculs numériques ce qui n'est pas le cas pour les théorèmes utilisant directement le lemme d'Arzela pour la démonstration de la convergence des approximations successives. Dans la note suivante [5] nous présentons quelques résultats simples dont on peut facilement déduire les théorèmes précédents.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY, PAN)

OUVRAGES CITÉS

[1] J. Dieudonné, *Sur la convergence des approximations successives*, Bull. des Sciences Math. **69** (1945), 62—72.

[2] T. Ważewski, *Sur la méthode des approximations succesives*. Ann. de la Soc. Polon. de Math. **16** (1938), 214—215.

[3] E. Kamke, *Differenzialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig, 1930.

[4] T. Ważewski, *Système des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Ann. de la Soc. Polon. de Math., **23** (1950).

[5] — , *Sur une procédé de prouver la convergence des approximations successives sans utilisation des séries de comparaison* (dans le présent cahier).

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys.—Vol. VIII, No. 1, 1960

MATHÉMATIQUE

Sur un procédé de prouver la convergence des approximations successives sans utilisation des séries de comparaison

par

T. WAŻEWSKI

Présenté le 21 novembre 1959

1. La plupart des démonstrations des théorèmes sur la convergence de la suite des approximations successives $x_0, x_1, \ldots$ ramène le problème de cette convergence à celui de la convergence de la série S de la forme $\sum a_n(c)$, en partant de l'inégalité $r(x_n, x_{n-1}) \quad a_n(c)$ (cf. les notations qui suivent).

Il en est anisi d'un théorème fondamental de L. W. Kantorovitch ([1], p. 466).

Il en est ainsi aussi d'un théorème bien général de Egle et Miškis (Mat. Sbornik, 1954). L'ensemble désigné par nous comme G (par. 2) correspond à leur demi-groupe Γ. Un procédé n'utilisant pas la série S était appliqué par I. Jungermann et par moi-même (cf. [2] et [3]). Dans la suite nous appliquons une idée ingénieuse et élégante de I. G. Petrovski présentée dans son manuel des équations différentielles ordinaires [4]. L'idée est basée sur la notion du diamètre de l'ensemble fermé K qui par l'intermédiaire de la transformation $y = f(x)$ passe en sa partie $f(K) \subset K$.

Nous remplaçons (cf. Théorème 1) K par l'ensemble non fermé L des éléments de la suite $x_0, x_1, \ldots$, pour lequel on a $f(L) \subset L$. Théorème 2 fournit une condition pour l'existence de toutes les approximations successives x_n et une localisation des x_n dans une boule sphérique. Le Théorème 3 concerne un autre type d'approximations successives (considéré dans [2]). Il suffit de supposer que $a(u)$ est unilatéralement continue (à droite). L'hypothèse de convexité de $a(u)$ (intervenant dans [1] rélativement à $V(x)$ et jouant un rôle analogue mais pas identique) n'est pas nécéssaire.

Notre procédé s'applique aussi au cas où S diverge (exemple: $a(u) = u, 1+u$). Les Théorèmes 1, 2, 3 se prêtent aux calculs numériques.

2. HYPOTHÈSE H_1. *Soit G un ensemble abstrait jouissant des propriétés suivantes:*

I. *Pour certaines paires u, v d'éléments de G la relation $u < v$ est définie, sous réserve toute-fois qu'elle satisfait aux postulats suivants. Si $u < v$, alors aucune des relations $v < u$, $u = v$ n'a lieu. Si $u < v$, $v < w$, alors $u < w$. G admet un élément minimal désigné par 0, tel que $0 \leqslant u$ pour chaque u de G.*

La relation $u \leqslant v$ exprime que soit $u = v$, soit $u < v$.

II. *Pour chaque u et v de G la somme $u + v$ appartenant à G est définie. On a toujours $u + v = v + u$, $u + 0 = u$. On pose, par définition, $2u = u + u$.*

III. *Soient u, v, w trois éléments de G. Si $u \leqslant v$, alors $u + w \leqslant v + w$. Si $u + v \leqslant w$, alors $u \leqslant w$.*

IV. *Une suite infinie d'éléments u_n de G est dite décroissante si, pour chaque indice n on a $u_{n+1} \leqslant u_n$. Pour chaque suite d'une telle sorte il existe une limite unique $\lim u_n$ appartenant à G. Si pour une telle suite $\lim u_n = u$, nous écrirons $u_n \searrow u$. Si pour chaque n on a $u_n = w$, alors $u_n \searrow w$. Admettons que $u_n \searrow u$, $v_n \searrow v$. On a alors $u_n + v_n \searrow u + v$. Si, en plus, pour chaque indice $u_n \leqslant v_n$, alors $u \leqslant v$.*

Pour une suite décroissante la limite ne change pas lorsque l'on supprime un nombre fini d'éléments initiaux.

DÉFINITION 1. Si b appartient à G, nous entendons par l'intervalle $[0, b]$ la classe des u appartenant à G pour lesquels $0 \leqslant u \leqslant b$.

3. Soit Z un ensemble quelconque et $y = f(x)$ une fonction définie pour chaque élément de Z. La classe des valeurs que prend $f(x)$ dans Z sera désignée par $f(Z)$.

HYPOTHÈSE H_2. I. *La fonction $a(u)$ est définie dans un ensemble Δ (intervalle généralisé à l'origine 0), tel que $0 \in \Delta \subset G$, et $[0, k] \subset \Delta$ lorsque $k \in \Delta$.*

Nous avons:

II. $a(\Delta) \subset G$.

III. *$a(u) \leqslant a(v)$ lorsque $u \in \Delta$, $v \in \Delta$, $u \leqslant v$, (croissance de $a(u)$ dans Δ).*

IV. *$a(u)$ est monotonnement continue à droite dans Δ. Ceci veut dire que si $u_n \in \Delta$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et $u_n \searrow w$, alors $a(u_n) \searrow a(w)$.*

V. *$a(0) = 0$ et $u = 0$ constitue l'unique solution (appartenant à Δ) de l'équation $u = a(u)$.*

Remarque 1. Dans la suite nous admettons les Hypothèses H_1 et H_2.

DÉFINITION 2 (des itérées de $a(u)$). Nous posons pour $u \in \Delta$: $a_0(u) = u$ et $a_{n+1}(u) = a(a_n(u))$ lorsque $a_n(u) \in \Delta$.

PROPOSITION 1. Si c est un élément de contraction pour $a(u)$, c.à.d. si $c \in \Delta$, $a(c) \leqslant c$, alors pour chaque $n \geqslant 0$ il existe $a_n(u)$ et

$$a_{n+1}(c) \leqslant a_n(c) \leqslant c, \quad a_n(c) \searrow 0.$$

PROPOSITION 2. Admettons que b soit un élément de contraction avec l'excès q pour $a(u)$, ce qui veut dire que

$$q \in \Delta, \quad b \in \Delta, \quad q + a(b) \leqslant b.$$

Ceci posé, l'équation $u + a(u) = u$ possède la solution maximale $u = m(q, b)$ située dans $[0, b]$. En posant $b_0 = b$, $b_{n+1} = q + a(b_n)$ on a $b_n \searrow m(q, b) \leqslant b$.

Si $p \leqslant q + a(p)$, $p \leqslant b$, alors $p \leqslant m(q, b)$.

4. Voici une hypothèse que nous admettons dans la suite.

HYPOTHESE H_3. I. *R est un espace abstrait, tel que pour certaines suites infinies $x_n \in R$ il existe une limite unique $\lim x_n \in R$ qui ne change pas lorsque l'on introduit ou supprime un nombre fini d'éléments initiaux. Si $x_n = s \in R$ $(n = 1, 2, \ldots)$, alors $\lim x_n = s$,* c.-à-d. $x_n \to s$.

II. *A chaque couple d'éléments $x \in R$, $y \in R$ correspond la distance unique $r(x, y) \in G$. Nous avons $r(x, y) = 0$ alors et alors seulement, lorsque $x = y$. On a $r(x, y) = r(y, x)$, $r(x, z) \leqslant r(x, y) + r(y, z)$.*

III. *Pour $x^* \in R$, $b \in G$ désignons par*

$$S(x^*, b)$$

la boule composée des $x \in R$ pour lesquels $r(x^*, x) \leqslant b$. Nous admettons que, pour tous $x^* \in R$, $b \in G$, la boule $S(x^*, b)$ est fermée.

IV. *Sans définir explicitement le diamètre d'un ensemble non vide $A \subset R$, nous écrirons*

$$\operatorname{diam}(A) \leqslant c \in G$$

pour exprimer que $r(x, y) \leqslant c$ lorsque $x \in A$, $y \in A$. Nous écrirons d'autre part

$$\operatorname{diam}(z_0, z_1, \ldots) \leqslant c$$

lorsque $r(z_i, z_j) \leqslant c$, $(i = 0, 1, \ldots)$, $(i < j)$.

V. *L'espace R est complet au sens suivant: si $c_n \in G$ $(n = 0, 1, \ldots)$, $c_n \searrow 0$,*

$$\operatorname{diam}(x_n, x_{n+1}, \ldots) \leqslant c_n, \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

alors x_n converge vers un $y \in R$.

5. HYPOTHÈSE H_4. *$D \subset R$ et D est fermé. La fonction $z = f(x)$ est définie dans D, $f(D) \subset R$ et* (cf. Hypothese H_2)

$$r(f(x), f(y)) \leqslant a(r(x, y)) \quad \text{pour} \quad x \in D, \ y \in D. \tag{5.1}$$

PROPOSITION 3. Si $q \in \Delta$, $b \in \Delta$, $q + a(b) \leqslant b$, $s \in D$, $t \in D$ $D, r(s, f(s)) \leqslant q$, $r(s, t) \leqslant b$, alors $r(s, f(t)) \leqslant b$.

DÉFINITION 3. Nous admettons que $x^* \in D$ et posons

$$x_0 = x^*, \ x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{lorsque} \quad x_n \in D.$$

Si x_n existe pour chaque n, nous dirons que x^* est infiniment itérable par rapport à f et D.

6. THÉORÈME 1. *Si x^* est infiniment itérable par rapport à $f(x)$ et D et si nous avons:*

$$c \in \Delta,\ a(c) \leqslant c, \tag{6.1}$$

$$\operatorname{diam}(x_0, x_1, \ldots) \leqslant c, \tag{6.2}$$

alors

$$\operatorname{diam}(x_n, x_{n+1}, \ldots) \leqslant a_n(c),\ (n \geqslant 0), \tag{6.3}$$

$$x_n \to \bar{x},\quad \text{où}\quad \bar{x} \in D, \tag{6.4}$$

$$r(x_n, \bar{x}) \leqslant a_n(c),\quad (n \geqslant 0), \tag{6.5}$$

$$\bar{x} = f(\bar{x}). \tag{6.6}$$

Si, en outre,

$$\hat{x} \in D,\ \hat{x} = f(\hat{x}),\quad r(\bar{x}, \hat{x}) \leqslant c, \tag{6.7}$$

alors

$$\bar{x} = \hat{x}. \tag{6.8}$$

Si, enfin, pour certains n, q, b on a

$$b \in \Delta,\ q \in \Delta,\ q + a(b) \leqslant b,\quad r(x_{n-1}, x_n) \leqslant q \tag{6.9}$$

alors (cf. Proposition 2)

$$r(x_{n-1}, x) \leqslant m(b, r(x_{n-1}, x_n)) \leqslant m(b, q) \leqslant b. \tag{6.10}$$

La démonstration de (6.3) et (6.4) est immédiate. (6.5) résulte de (6.3) en vertu de la partie III de l'Hypothese H_3. En observant que $r(x_n, f(x)) = r(f(x_{n-1}), f(x)) \leqslant a(r(x_{n-1}, x)) \leqslant a(a_{n-1}(c)) = a_n(c)$ et en rapprochant cette inégalité de (6.5) on obtient $0 \leqslant r(x, f(\bar{x})) \leqslant 2\,a_n(c) \searrow 0$, d'où résulte (6.6). De (6.6) et (6.7) on obtient de proche en proche que $0 \leqslant r(x, \hat{x}) \leqslant a_n(c)$, d'où résulte (6.8). Les inégalités (6.10) peuvent être déduites des Propositions 2 et 3.

7. THÉORÈME 2. *Admettons que l'Hypothèse H_4 est valable pour $D = S(x^*, b)$ où $b \in \Delta$ et que pour un $q \in \Delta$ on a*

$$q + a(b) \leqslant b,\quad r(x^*, f(x^*)) \leqslant q. \tag{7.1}$$

Ceci posé, on obtient

$$f(S(x^*, b)) \subset S(x^*, b), \tag{7.2}$$

x^* est infiniment itérable et

$$x_n \in S(x^*, b),\quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{7.3}$$

Si, en plus, il existe un c tel que

$$2b \leqslant c, \quad c \in \Delta, \qquad a(c) \leqslant c, \tag{7.4}$$

alors les prémisses du Théorème 1 sont justes pour $D = S(x^*, b)$ donc le Théorème 1 peut être appliqué.

Démonstration. (7.2) peut être prouvé au moyen de la Proposition 3.

On en déduit (7.3). En observant que $\operatorname{diam}(S(x^*, b)) \leqslant 2b$, on achève la démonstration en s'appuyant sur (7.4).

8. Hypothèse H_5. *La fonction $A(u, u)$ aux valeurs appartenant à G est définie dans le produit cartésien $\Delta \times \Delta$. Elle est croissante au sens suivant:*

$A(u, v) \leqslant A(h, k)$ lorsque $u \leqslant h, v \leqslant k$. Nous posons, par définition,

$$a(u) = A(u, u)$$

et nous admettons que $a(u)$ satisfait à l'Hypothèse H_2.

On démontre de proche en proche la

Proposition 4. Admettons que $A(c, c) \leqslant c \in \Delta$. Ceci posé, on a pour chaque $n > 0 : A(a_{n-1}(c), a_{n+1}(c)) \leqslant a_{n+1}(c) \leqslant a_n(c) < c$. Si $w \in \Delta$, $w \leqslant c$, $w \leqslant A(a_n(c), w)$, alors $w \leqslant a_{n+1}(c)$.

9. Hypothèse H_6. *Nous admettons que les Hypothèses H_1, H_2, H_3 et H_5, ont lieu, que $D \subset R$ et D est fermé, que la fonction $f(y, z)$ aux valeurs appartenant à R est définie dans le produit cartésien $D \times D$ et que*

$$r(f(y, z), f(s, t)) \leqslant A(r(y, s), r(z, t)) \quad \text{lorsque} \quad y, z, s, t \in D. \tag{9.1}$$

Théorème 3. *Admettons l'Hypothèse H_6. Soit $x^* \in D$. Admettons que pour chaque $x \in D$ l'équation $y = f(x, y)$ possède au moins une solution en y située dans D. Nous définissons les itérées x_n par les conditions*

$$x_0 = x^*, \qquad x_{n+1} = f(x_n, x_{n+1}), \qquad (x_{n+1} \in D). \tag{9.2}$$

Nous admettons que

$$A(c, c) \leqslant c \in \Delta, \ \operatorname{diam}(x_0, x_1, \ldots) \leqslant c. \tag{9.3}$$

Ceci posé, nous affirmons que: 1) $\operatorname{diam}(x_n, x_{n+1}, \ldots) \leqslant a_n(c)$ 2) x_n converge vers un $h \in D$, 3) h constitue une solution de l'équation

$$x = f(x, x), \tag{9.4}$$

$$r(x_n, h) \leqslant a_n(c), \qquad (n < 0), \tag{9.5}$$

et que toute solution $k \in D$ de l'équation (9.4) pour laquelle $r(h, k) \leqslant c$ est identique avec h.

Démonstration. On s'appuie sur la Proposition 4 et on procède d'une façon analogue comme dans la démonstration du Théorème 1.

Remarque 2. Les Théorèmes 1, 2 et 3 s'appliquent en particulier au cas, où les ensembles G et R coïncident respectivement avec les espaces K et B_K de Kantorovitch [1].

Les résultats de la présente note ont été communiqués au cours de mes conférences à Florence, Naples et Pise (Avril 1959). Au Séminaire de Cracovie (Mars, 1959) j'ai présenté des résultats analogues en appliquant le procédé de [2] et [3], où la notion du diamètre n'intervient pas explicitement.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY, PAN)

OUVRAGES CITÉS

[1] L. W. Kantorovitch, B. Z. Voulich et A. V. G. Pinsker, *L'analyse fonctionnelle dans les espaces demi-ordonnés*, Moscou, 1950 (en russe).

[2] T. Ważewski, *Sur la méthode des approximations successives*, Ann. de la Soc. Polon. de Math., **16** (1938), 214—215.

[3] — , *Sur une extension du procédé de I. Jungermann pour établir la convergence des approximations successives au cas des équations différentielles ordinaires*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys., (note précédente).

[4] I. G. Petrovski, *Leçons sur la théorie des équations différentielles ordinaires*, Moscou, 1949 (en russe), pp. 61—62.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys.—Vol. VIII, No. 1, 1960

MATHÉMATIQUE

Sur certaines propriétés des intégrales analogues aux potentiels et un problème aux limites pour l'équation parabolique

par

W. POGORZELSKI

Présenté par T. WAŻEWSKI le 20 novembre, 1959

1. Introduction. Soit l'équation aux dérivées partielles quasilinéaire du second ordre de la forme

$$(1)\qquad \Psi(u) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(X,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(X,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c(X,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = F\left(X,t,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

dans l'espace euclidien à $n+1$ dimensions de points $[X(x_1,\ldots,x_n),t]$. Nous admettons les hypothèses suivantes.

I. Les coefficients réels $a_{\alpha\beta}$, b_α, c sont des fonctions continues des coordonnées $(x_1,\ldots,x_n,t)$, définies dans la région cylindrique $[X \in \Omega + S,\ 0 \leqslant t \leqslant T]$ (où Ω est un domaine borné, limité par une surface fermée S dans l'espace à n dimensions) et vérifiant les conditions de Hölder

$$(2)\qquad \begin{cases} |a_{\alpha\beta}(X,t) - a_{\alpha\beta}(X_1,t_1)| < \text{const.}\,[|XX_1|^h + |t-t_1|^{h'}], \\ |b_\alpha(X,t) - b_\alpha(X_1,t)| < \text{const.}\,|XX_1|^h, \\ |c(X,t) - c(X_1,t)| < \text{const.}\,|XX_1|^h, \end{cases}$$

où $0 < h,\ h' \leqslant 1$, $|X\,X_1|$ désigne la distance euclidienne des points X et X_1.

II. La forme quadratique $\sum a_{\alpha\beta}(X,\ t)\ Z_\alpha\ Z_\beta$ est définie-positive dans $\Omega + S$.

III. La surface S vérifie les conditions de Liapounoff.

IV. La fonction $F(X,t,u_0,\ldots,u_n)$ est définie et continue dans la région

$$(3)\qquad X \in \Omega;\quad -\infty < u_\nu < +\infty,\quad 0 < t \leqslant T$$

$(\nu = 0,1,\ldots,n)$, où elle verifie l'inégalité

$$(4)\qquad |F(X,t,u_0,\ldots,u_n)| < m_F \sum_{\nu=0}^{n} |u_\nu|^r + m'_F |XP_X|^{-p}\, t^{-r'},$$

et une condition de Hölder

$$(5)\qquad |F(X,t,u_0,\ldots,u_n)-F(X',t,u_0',\ldots,u_n')|<$$
$$<k_F\left[C^*\,t^{-r'}|XX'|^{h_F}+\sum_{\nu=0}^{n}|u_\nu-u_\nu'|^{h_F}\right],$$

dans tout domaine fermé Ω^* à l'intérieur de Ω, r, r', p, m_F, m_F', k_F, h_F sont des constantes positives; on admet en outre que $0\leqslant r<1$, $0\leqslant r<1$, $0\leqslant p<1$, P_X désigne un point de la surface S le plus rapproché du point X; la constante positive C^* dépend de Ω^*.

2. Quelques propriétés des intégrales analogues au potentiel.

THÉORÈME 1. *Si la fonction $\varphi(Q,\tau)$, définie et intégrable dans la région $]Q\in S,\ 0<\tau\leqslant T]$, vérifie l'inégalité*

$$(6)\qquad |\varphi(Q,\tau)|<\frac{M_\varphi}{\tau^{\mu_\varphi}},\qquad (0\leqslant\mu_\varphi\leqslant 1),$$

alors les dérivées spatiales

$$(7)\qquad U_{x_\nu}(X,t)=\int_0^t\iint_S \Gamma_{x_\nu}(X,t;Q,\tau)\,\varphi(Q,\tau)\,dQd\tau$$

du potentiel de simple couche, relatif à l'équation (1), *(Γ designe la solution fondamentale de l'équation* (1), *déterminée dans l'ouvrage* [1]) *vérifient l'inégalité*

$$(8)\qquad |U_{x_\nu}(X,t)|<\frac{CM_\varphi}{t^{\mu_\varphi-\Theta}\,|XP_X|^{1-\Theta}}$$

en tout point $X\in\Omega$ pour $0<t\leqslant T$, Θ étant une constante positive arbitraire; C est une constante positive, indépendante de la fonction φ, mais dépendante du choix de la constante Θ.

THÉORÈME 2. *Si la fonction $\varrho(Y,\tau)$, définie et intégrable dans la région $[Y\in\Omega,\ 0<\tau\leqslant T]$, vérifie l'inégalité*

$$(9)\qquad |\varrho(Y,\tau)|<\frac{M_\varrho}{\tau^{\mu_\varrho}\,|YQ_Y|^{q}},$$

où μ_ϱ et q sont des constantes non négatives, inférieures à l'unité, M_ϱ est une constante positive et Q_Y désigne un point de la surface S le plus rapproché du point intérieur $Y\in\Omega$, alors:

1) *le potentiel de charge spatiale*

$$(10)\qquad V(X,t)=\int_0^t\iiint_\Omega \Gamma(X,t;Y,\tau)\,\varrho(Y,\tau)\,dYd\tau$$

et ses dérivées spatiales admettent des valeurs limites

$$(11)\qquad \begin{cases}\lim\limits_{X\to P} V(X,t)=\int\limits_0^t\iiint\limits_\Omega \Gamma(P,t;Q,\tau)\,\varrho(Y,\tau)\,dYd\tau=V(P,t)\\ \lim\limits_{X\to P} V_{x_\nu}(X,t)=\int\limits_0^t\iiint\limits_\Omega \Gamma_{x_\nu}(P,t;Q,\tau)\,\varrho(Y,\tau)\,dYd\tau=V_{x_\nu}(P,t)\end{cases}$$

en tout point $P\in S$, pour $0<t\leqslant T$ fixé;

2) *les fonctions* $V(X,t)$ *et* $V_{x_\nu}(X,t)$ *et leurs limites vérifient les inégalités*

$$|V(X,t)| < \frac{\text{const } M_\varrho}{t^{\mu_\varrho + \mu_1 - 1}}; \qquad V_{x_\nu}(X,t)| < \frac{\text{const } M_\varrho}{t^{\mu_\varrho + \mu_1 - 1}}, \tag{12}$$

pour $X \in \Omega + S$, $0 < t < T$, *la constante* μ_1 *étant fixée dans l'intervalle* $(1+q)/2 < \mu_1 < 1$.

THÉORÈME 3. *Si une fonction* $\varrho(Y,\tau)$, *définie et intégrable dans le domaine* $|Y \in \Omega, \ 0 < \tau \leqslant T|$, *vérifie l'inégalité* (9), *alors le potentiel de charge spatiale* (10) *vérifie une condition de Hölder de la forme*

$$V(X,t) - V(X',t') < \frac{\text{const.} M_\varrho}{t^{\mu_\varrho}} \left[|XX'| + |t-t'|^{(2\mu_1 - q)/2} \right], \tag{13}$$

(pour $X, X_1 \in \Omega + S$, $0 < t < t' \leqslant T$, $(1+q)/2 < \mu_1 < 1$*) et les dérivées spatiales de ce potentiel vérifient en tout domaine fermé* $\Omega^* \subset \Omega$ *une condition de Hölder*

$$|V_{x_\nu}(X,t) - V_{x_\nu}(X',t')| < \frac{C^* M_\varrho}{t^{\mu_\varrho}} \left[|XX'|^{2\mu' - 1} + |t-t'|^{\mu' - 1/2} \right], \tag{14}$$

où $\frac{1}{2} < \mu' < 1$, C^* *est une constante positive, dépendant du domaine* Ω^*.

THÉORÈME 4. *Dans les hypothèses des Théorèmes* 3 *et* 4, *les fonctions limites des dérivées spatiales du potentiel de charge spatiale* (10), *sur la surface* S, *vérifient une condition de Hölder, à savoir:*

$$|V_{x_\nu}(P,t) - V_{x_\nu}(P',t')| < \frac{\text{const } M_\varrho}{t^{\mu_\varrho}} \left[|PP'|^{\vartheta - q} + |t-t'|^{\frac{1+\vartheta'-q}{4}} \right] \tag{15}$$

où $P, P' \in S$, $0 < t < t_1 < T$, Θ *et* Θ' *désignent les deux nombres positifs arbitraires, inférieurs à l'unité et supérieurs à* q.

THÉORÈME 5. *Si la fonction* $f(X)$, *définie et intégrable dans* Ω, *vérifie l'inégalité*

$$|f(X)| < \frac{m_f}{|XP_X|^p}, \qquad (0 < p < 1) \tag{16}$$

(m_f *est une constante positive), alors l'intégrale généralisée de Poisson-Weierstrass*

$$J(X,t) = \int\int\int_\Omega \Gamma(X,t;Y,0) f(Y)\, dY \tag{17}$$

a les propriétés suivantes:

1) *la fonction* (17) *et ses dérivées spatiales ont les fonctions limites continues*

$$J(P,t) = \lim_{X \to P} J(X,t); \quad J_{x_\nu}(P,t) = \lim_{X \to P} J_{x_\nu}(X,t)$$

en tout point $P \in S$, *pour* $0 < t \leqslant T$.

2) *la fonction* (17) *et ses dérivées spatiales vérifient les limitations de la forme*

$$|J(X,t)| < \frac{Cm_f}{t^{\mu_1}}, \qquad |J_{x_\nu}(X,t)| < \frac{Cm_f}{t^{\mu_1}}, \tag{18}$$

en tout point $X \in \Omega + S$, *pour* $0 < t \leqslant T$, $(1+p)/2 < \mu_1 < 1$, C *et* C' *sont des constantes positives, indépendantes de* f;

3) *la fonction* (17) *vérifie l'inégalité de Hölder*

$$|J(X,t) - J(X',t')| < \frac{\text{const. } m_f}{t^{\mu_1}} [|XX_1| + |t-t'|^{\mu_1 - p/2}], \tag{19}$$

pour $0 < t < t_1 \leqslant T$, $\quad X, X' \in \Omega + S$, $\quad (1+p)/2 < \mu_1 < 1$;

4) *les dérivées spatiales de la fonction* (17) *vérifient la condition de la forme*

$$|J_{x_\nu}(X,t) - J_{x_\nu}(X',t')| < \frac{C^* m_f}{t^{\mu_1}} [|XX'|^{2\mu'} + |t-t'|^{\mu_1 - 1/2}], \tag{20}$$

$(\frac{1}{2} < \mu' < 1)$ *dans tout domaine fermé* $\Omega^* \subset \Omega$, C^* *est une constante positive, indépendante de la fonction* f, *mais dépendante du domaine* Ω^*;

5) *les fonctions limites des dérivées spatiales de la fonction* (17) *sur la surface* S *vérifient la condition de Hölder*

$$J_{x_\nu}(P,t) - J_{x_\nu}(P',t') < \frac{\text{const. } m_f}{t^{\mu_1}} \left[|PP'|^{\Theta - p} + |t-t'|^{\frac{1+\Theta-p}{4}} \right] \tag{21}$$

où Θ *et* μ_1 *sont des constantes positives, choisies dans les intervalles*

$$\frac{1+p}{2} < \mu_1 < 1, \qquad p < \Theta < 1$$

et liées par la relation $\Theta = 2\mu_1 - 1$.

3. Certain problème aux limites. Les propriétés citées trouvent une application dans la solution du problème aux limites suivant (dans les hypothèses plus générales que celles posées dans les travaux [3] et [4]): on cherche une fonction $u(X,t)$: 1) qui vérifie l'équation donnée (1) en tout point intérieur $X \in \Omega$ pour $0 < t \leqslant T$; 2) qui vérifie une condition limite

$$\frac{du}{dT_p} + g(P,t)\,u(P,t) = G(P,t,u) \tag{22}$$

en tout point $P \in S$, pour $0 < t \leqslant T$, du/dT_p désigne la valeur limite de la dérivée transversale; 3) qui vérifie une condition initiale

$$\lim_{t \to 0} u(X,t) = f(X) \tag{23}$$

en tout point de continuité X de la fonction donnée $f(X)$.

On suppose:

1) que les fonctions $g(P,t)$ et $G(P,t,u)$ sont définies et continues dans les régions

$$[P \in S;\ 0 < t \leqslant T] \text{ resp. } [P \in S;\ 0 < t \leqslant T;\ -\infty < u < +\infty]$$

2) la fonction g est bornée et la fonction G vérifie l'inégalité

$$|G(P,t,u)| < m_G |u|^r + m'_G \cdot t^{-r'} \tag{24}$$

où m_G, m'_G, r' sont des constantes positives $(0 \leqslant r' < 1)$;

3) la fonction intégrable $f(X)$ vérifie une inégalité

$$|f(X)| < \frac{m_f}{|XP_X|^p}, \qquad (0 \leqslant p < 1) \qquad m_f > 0. \tag{25}$$

On cherche la solution du problème proposé sous la forme d'une somme

$$u(X,t) = \int_0^t \iiint_{\Omega} \Gamma(Y,t(Y,\tau) F_1 \left[Y, \tau, u(Y,\tau) \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n} \right] dY d\tau + \tag{26}$$

$$+ \int_0^t \iint_S \Gamma(X,t;Q,\tau) \varphi(Q,\tau) dQ d\tau + \iiint_{\Omega} \Gamma(X,t;Y,0) f(Y) dY,$$

où l'on a posé

$$\begin{cases} F_1 = -(2\sqrt{\pi})^{-n} [\det a^{\alpha\beta}(Y,\tau)]^{1/2} F; \\ f_1(Y) = (2\sqrt{\pi})^{-n} [\det |a^{\alpha\beta}(Y,0)|]^{-1/2} f(Y). \end{cases} \tag{26}$$

En demandant que la fonction (26) vérifie la condition limite (22), on arrive à une équation intégro-différentielle et ensuite on ramène le problème à la solution d'un système d'équations intégrales (voir [3] et [4])

$$u_\nu(X,t) = \int_0^t \iiint_{\Omega} \Gamma(X,t;Y,\tau) F_1 [Y,\tau,u_0(Y,\tau,\ldots,u_n(Y,\tau)] dY d\tau + \tag{27}$$

$$+ \int_0^t \iint_S \Gamma_\nu(X,t;Q,\tau) \varphi(Q,\tau) dQ d\tau + \iiint_{\Omega} \Gamma_\nu(X,t;Y,0) f_1(Y) dY;$$

$$- \frac{(2\sqrt{\pi})^n}{\sqrt{\det |a^{\alpha\beta}(P,t)|}} \varphi(P,t) + \int_0^t \iint_S \left\{ \frac{d}{dT_P} [\Gamma(P,t;Q,\varphi) + g(P,t) \Gamma(P,t;Q,\tau] \right\} \times$$

$$\times \varphi(Q,\tau) dQ d\tau = - \int_0^t \iiint_{\Omega} \left\{ \frac{d}{dT_P} [\Gamma(P,t;Y,\tau)] + g(P,t) \Gamma(P,t,Y,\tau) \right\} \times$$

$$\times F_1 [Y,\tau,u_0(Y,\tau),\ldots,u_n(Y,\tau) dY d\tau -$$

$$- \iiint_{\Omega} \left\{ \frac{d}{dT_P} [\Gamma(P,t;Y,0)] + g(P,t) \Gamma(P,t,Y,0) f_1(Y) \right\} dY + G[P,t,u_0(P,t)],$$

$(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ aux fonctions inconnues $u_0(X,t), \ldots, u_n(X,t)$, $\varphi(P,t)$; on a posé $\Gamma_0 = \Gamma$, $\Gamma_\nu = \Gamma_{x_\nu}$.

Pour résoudre le système (27), on introduit un espace fonctionnel A composé de tous les systèmes de fonctions continues réelles

$$[u_0(X,t), \ldots, u_n(X,t), \varphi(P,t)], \tag{28}$$

définies dans les régions ouvertes

$$[X \in \Omega;\ 0 < t < T] \text{ resp. } [P \in S,\ 0 < t < T] \tag{29}$$

et vérifiant les inégalités

$$t^{\mu+\alpha}|XP_x|^{\theta+\beta}|u_\nu(X,t)|<\infty, \qquad t^{\mu+\alpha}|\varphi(P,t)|<\infty, \tag{30}$$

$(\nu=0,1,\ldots,n)$; $\mu, \alpha, \beta, \Theta$ sont des constantes fixées arbitrairement et vérifiant les inégalités

$$\max\left(\frac{1+p}{2}, r'\right)<\mu<1;\ \alpha>0,\ \beta>0,\ \Theta>0, \qquad \mu+\alpha<1,\ \Theta+\beta<1. \tag{31}$$

On définit la norme d'un élément $U=[u_0,\ldots,u_n,\varphi]$ par la formule

$$\|U\|=\max\Big[\sup_{\substack{X\in\Omega\\0<t<T}}[t^{\mu+\alpha}|XP_x|^{\theta+\beta}u_\nu(X,t)]+\sup_{\substack{0<t<T\\P\in S}}[t^{\mu-\alpha}|\varphi(P,t)|]\Big], \tag{32}$$

et les opérations linéaires sur les éléments. L'espace Λ est donc un espace de Banach. On considère ensuite un ensemble E de points de l'espace Λ vérifiant les inégalités

$$t^{\mu}|XP_X|^{\theta}|u_\nu(X,t)|\leqslant\varrho_1, \qquad t^{\mu}|\varphi(P,t)|\leqslant\varrho_2, \tag{33}$$

ϱ_1 et ϱ_2 étant des constantes fixées suffisamment grandes. On transforme l'ensemble E en ensemble E' par les relations

$$\begin{cases} v_\nu(X,t)=\Xi_\nu[u_0,\ldots,u_n,\varphi], & (\nu=0,\ldots,n)\\ \psi(P,t)=\Xi_{n+1}[u_0,\ldots,u_n,\varphi], \end{cases} \tag{34}$$

faisant correspondre à tout point $[u_0,\ldots,u_n,\varphi]$ de l'ensemble E un point $[v_0,\ldots,v_n,\psi]$ du même ensemble; on a désigné par Ξ_ν les résultats des opérations fonctionnelles, définies par les membres droits des équations, (27) pour $\nu=0,1,\ldots,n$ et par Ξ_{n+1} une solution de l'équation intégrale de Volterra qu'on obtient en substituant dans le membre gauche de la dernière des équations (27) la fonction ψ à la place de φ. On démontre que l'ensemble transformé $E'\subset E$ est compact, que la transformation (34) est continue et on conclut, en s'appuyant sur le théorème topologique de Schauder, l'existence d'un point invariant de la transformation (34). Ce point $[u_0,\ldots,u_n,\varphi]$ présente une solution du système (27). On démontre que la fonction $u_0(X,t)$ est une solution du problème proposé.

Les démonstrations plus détaillées seront publiées prochainement.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY, PAN)

OUVRAGES CITÉS

[1] W. Pogorzelski, *Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique.* Ricerche di Matem., **5** (1956).

[2] — , *Propriétés des intégrales de l'équation parabolique normale.* Ann. Pol. Mat., **4** (1957).

[3] — . *Problèmes aux limites pour l'équation parabolique.* Ann. Pol. Math., **4** (1957).

[4] A. Piskorek, *Sur certains problèmes aux limites pour l'équation semi-linéaire parabolique.* Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math. astron. et phys. **6** (1958) 505.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys.—Vol. VIII, No. 1, 1960

Polynomial Approximation in Neutron Transport Theory

by

J. MIKA and R. ŻELAZNY

Presented by L. INFELD on September 23, 1959

The solution of the one-velocity Boltzmann equation in the transport theory is in general a very difficult task. One of the most appropriate methods is the use of the spherical harmonics development. Recently, two papers [1], [2] devoted to the application of Tschebyshev polynomials to this problem have been published. The problem of using general orthogonal polynomials for the solution of the Boltzmann equation is presented and preliminary results are given.

One velocity Boltzmann equation in the neutron transport theory in plane geometry has the following from:

$$\mu \frac{\partial \Psi(z,\mu)}{\partial z} \Psi(z,\mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^{+1} \Psi(z,\mu')\, d\mu', \tag{1}$$

where $\Psi(z,\mu)$ is the angular distribution of neutrons, z — co-ordinate measured in mean free path of neutron, μ — cosine of the angle between the direction of neutron velocity and the z-axis, and c — the number of secondaries per collision. We assume the isotropic scattering.

The most general polynomials orthogonal in the interval $(-1, +1)$ fulfilling the Rodrigue formula are Jacobi polynomials $P_n^{\alpha\beta}(\mu)$ [3]. The weight function is

$$w(\mu) = (1-\mu)^{\alpha}(1+\mu)^{\beta}, \qquad \alpha > -1, \qquad \beta > -1. \tag{2}$$

The angular distribution function $\Psi(z,\mu)$ can be expanded into the series

$$\Psi(z,\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{h_n} P_n^{\alpha\beta}(\mu)\, \Psi_n(z), \tag{3}$$

where

$$\Psi_n(z) = \int_{-1}^{+1} \Psi(z,\mu')\, P_n^{\alpha\beta}(\mu')\, w(\mu')\, d\mu' \tag{4}$$

and

$$\int_{-1}^{+1} P_n^{\alpha\beta}(\mu)\, P_m^{\alpha\beta}(\mu)\, w(\mu)\, d\mu = \delta_{nm} h_n; \tag{5}$$

δ_{nm} is Kronnecker's symbol.

The Eq. (1) is then multiplied by $P_n^{\alpha\beta}(\mu)\,w(\mu)$ and integrated over all μ, using the recurrence formula of Jacobi polynomials:

$$(6)\qquad \mu P_n^{\alpha\beta}(\mu) = \frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)} P_{n+1}^{\alpha\beta} - (\alpha-\beta)\times$$
$$\times \frac{\alpha+\beta}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)} P_n + \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)} P_{n-1}$$

and the result is

$$(7)\qquad \frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)} \dot{\Psi}_{n+1} - (\alpha-\beta)\times$$
$$\times \frac{\alpha+\beta}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)} \dot{\Psi}_n + \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)} \dot{\Psi}_{n-1} +$$
$$+ \Psi_n - \delta_{0n} \frac{ch_0}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{h_m} \Psi_m = 0,$$

where the point above Ψ_n denotes the differentiation with respect to z and

$$(8)\qquad a_n = \int_{-1}^{+1} P_n^{\alpha\beta}(\mu)\, d\mu.$$

We shall seek solutions of these equations in the form:

$$(9)\qquad \Psi_n(z) = g_n e^{\nu z} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Substituting (9) into (7) we get the following set of equations

$$\left[1 - c - \nu(\alpha-\beta)\frac{1}{\alpha+\beta+2}\right] g_0 +$$
$$+ \left[\nu \frac{2}{\alpha+\beta+2} - \frac{c}{2}(\alpha-\beta)\frac{\alpha+\beta+3}{(\alpha+1)(\beta+1)}\right] g_1 - \sum_{m=2} \frac{ca_m}{2}\frac{h_0}{h_m} g_m = 0$$

$$(10)\qquad \nu \frac{2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)} g_{n+1} +$$
$$+ \left[1 - \nu(\alpha-\beta)\frac{\alpha+\beta}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)}\right] g_n +$$
$$+ \nu \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)} g_{n-1} = 0 \qquad n \geqslant 1.$$

The possibility of truncating the series (3), say, on the N-th term, depends on the convergence of the series. We shall not deal now with this problem, it will be the object of further investigations. However, we shall make some remarks concerning the dependence of eigenvalues ν on the order of approximation. We shall say that an approximation is of the order N, when the last term of the truncated series (3) contains $\Psi_N(z)$. Now, in the N-th approximation system (10) reduces into a finite

system of homogenous linear equations with respect to g_r. The determinant of this system must vanish. Denoting this determinant by D_N, we can write

$$D_N = 0$$

in the approximation of order N.

We can easily verify that D_N' is fulfill the following recurrence formula

$$(11) \quad D_N = \left[1 - \nu(\alpha-\beta)\frac{\alpha+\beta}{(\alpha+\beta+2N)(\alpha+\beta+2N+2)}\right] D_{N-1} -$$

$$- \nu^2 \frac{4N(\alpha+\beta+N)(\alpha+N)(p+N)}{(\alpha+\beta+2N-1)(\alpha+\beta+2N)^2(\alpha+\beta+2N+1)} D_{N-2}$$

$$+ (-1)^N \nu^N c a_N \prod_{k=1}^{N} \frac{k(\alpha+\beta+k)}{(\alpha+\beta+2k-1)(\alpha+\beta+2k)}$$

with

$$D_0 = 1 - c - \nu(\alpha-\beta)\frac{1}{\alpha+\beta+2}$$

$$D_1 = 1 - c - 2(1-c)\nu\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta+4} -$$

$$- \nu^2 \left[\frac{4(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2} - (\alpha-\beta)^2 \frac{\alpha+\beta}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+4)}\right].$$

From Eq. (11) we see that in the most general case of Jacobi polynomials D_N is the polynomial of order $N+1$ and has $N+1$ different roots. As

$$P_n^{\alpha\beta}(-x) = (-1)^n P_n^{\beta\alpha}(x),$$

the coefficients of even powers of x in Jacobi polynomials of odd order must be proportional to $(\alpha-\beta)$. We see that $a_m = 0$ for an odd m when $\alpha = \beta$. Then, for $\alpha = \beta$ (i.e. for Gegenbauer polynomials) D_N is a polynomial of ν^2 of order $(N+1)\,2$ for N odd and $N/2$ for N even. This is a fact well known in the spherical harmonic (Legendre polynomials) method that even approximations give rather poorer results than the odd ones, because in the former case the number of constants of integration is not consistent with the number of boundary conditions. However, in the case of $\alpha \neq \beta$ this disadvantage does not appear.

In a general case the flux and the current of neutrons have the following form

$$(12) \quad \Phi(z) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{h_n} \Psi_n(z)$$

and

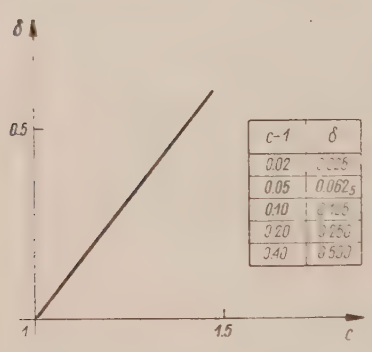
$$(13) \quad I(z) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{h_n} \Psi_n(z),$$

where

$$(14) \quad b_n = \int_{-1}^{+1} \mu P_n^{\alpha\beta}(\mu)\, d\mu.$$

In formula (13) the summing begins from $n = 1$ since $P_0^{\alpha\beta}(\mu) \equiv 1$ and $b_0 = 0$.

The problem of selection of adequate polynomials is not a simple one. It is evident that the parameters α and β depend on the material constant c, the geometry and the order of approximation. Up to now a general recipe is not known. But one can show in special cases that such a relation actually exists. In view of this the 1-st order approximation in the case of Gegenbauer polynomials was taken into consideration. With $c > 1$ the critical thickness of the bare homogeneous plate reactor was calculated in the function of c. The assumption was made that the extrapolated end point z_0 is the same as in the Milne problem. The parameter $\delta = \alpha = \beta$ was chosen so as to obtain results equal to exact values of the critical thickness calculated by the Carlson method [4]. In this way the relation of δ and c for this particular problem was obtained (Fig. 1). We see that Legendre polynomials are not generally the best ones, but if c is nearly 1 (i.e. the thickness is very great) the Legendre polynomials are the best approximation.



c-1	δ
0.02	0.025
0.05	0.062₅
0.10	0.125
0.20	0.250
0.40	0.500

Fig. 1

The latter result cannot serve as a base for generalization but further investigations of this problem are in progress.

Summary

The problem of using general orthogonal polynomials for the solution of a one-velocity Boltzmann equation in the neutron transport theory is formulated. General considerations concerning the use of Jacobi and Gegenbauer polynomials for this purpose are presented and the determination of an arbitrary parameter in Gegenbauer's case is given.

INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
(INSTYTUT BADAŃ JĄDROWYCH, PAN)

REFERENCES

[1] W. R. Conkie, *Polynomial approximations in neutron transport theory*, CRT-754 (1958).

[2] O. Aspelund, *On a new method for solving the Boltzmann equation in neutron transport theory*, Proc. of Second Geneva Conference, P/573.

[3] A. Erdélyj, W. Magnus, F. Oberhetinger, F. Tricomi, *Higher transcedental functions*, Vol. II, Mc Graw-Hill, 1953.

[4] G. Carlson, B. I. Bell, *Solution of the transport equation by the S_n method*, Proc. of Second Geneva Conference, P/2386.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys.—Vol. VIII, No. 1, 1960

Scattering of Kaons with $\bar{K}K\pi\pi$ Coupling in the Fixed-Source Theory

by

W. KRÓLIKOWSKI

Presented by W. RUBINOWICZ on November 17, 1959

In recent papers a fixed-source approach to scattering of kaons was presented assuming the Yukawa pseudoscalar (in the fixed source limit — pseudovector) [1] or scalar coupling [2] between baryons and kaons. In this approach the baryon particle was represented by a fixed-source having some internal degrees of freedom (spin, isospin and strangeness of the baryon). To this end, a formalism for baryons introduced in [3] was used. As a conclusion of the mentioned papers we have in both the cases a possibility of a $T=1$ resonance at high energies for scattering of kaons on nucleons. Tamm-Dancoff calculations with recoils carried out recently by Białkowski and Jurewicz [4] in the pseudoscalar case for $p+K^-$ scattering gave also such a resonance in the $P_{3\,2}$ state. This resonance was placed at the higher energies and decreased as a smaller value was taken for $N\,Y\,K$ coupling constant. Since, so far, no resonance is observed for $p+K$ scattering in the extended energy region, a possibility of an additional interaction for kaons is appealing. This additional interaction would enable us to use a considerably small value for $N\,Y\,K$ coupling constant in order to avoid the unobserved $T=1$ resonance and at the same time to get the correctly high value for the cross-section. This additional interaction, together with $N\,Y\,K$ interaction, should lead to an almost constant S wave $T=1$ cross-section at low energies. In the present note it is pointed out that $KK\pi\pi$ interaction proposed some time ago by Barshay [5] has the required properties. Thus, we gain a new argument for the existence of the $\bar{K}K\pi\pi$ interaction.

We take into account the following Hamiltonian

$$H = H^B + H^\pi + H^K + H^{B\pi} + H^{BK} + H^{\pi K}, \tag{1}$$

where

$$H^{BK} = \frac{f_K^0}{\mu_K}\sigma_i\,\xi_\alpha \int d_3\,x\varrho\,(|\vec{x}\,)\,\partial_i\,(CK\,(\vec{x}))_\alpha + \text{h. c.} + \tag{2}$$

$$+ \frac{\lambda_K^0}{M}\Big[\int d_3\,x\varrho\,(\,\vec{x}\,)\,\xi_\alpha\,(CK\,(\vec{x}))_\alpha + h.\,\text{c.}\Big]^2$$

and

$$H^{\pi K} = \lambda^0_{\pi K} \int d_3 x : K^*_\alpha(\vec{x})\, K_\alpha(\vec{x})\, \pi_j(\vec{x})\, \pi_j(\vec{x}) : . \tag{3}$$

We have here

$$C = -\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \qquad K = (K_\alpha) = \begin{pmatrix} K^+ \\ K_0 \end{pmatrix}$$

and

$$K_\alpha(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (a_{\vec{k}\alpha}\, e^{i\vec{k}\vec{x}} + b^*_{\vec{k}}\, e^{-i\vec{k}\vec{x}}).$$

A further explanation of the notation may be found in [3] and [1]. Scattering amplitudes are given by formulae (cf. [1]):

$$T_{\sigma \vec{k}\alpha}(\lambda) = \langle \Phi^-_\lambda\, V_{\vec{k}\alpha}\, \Phi_\sigma \rangle, \qquad V_{\vec{k}\alpha} = [H^{BK} + H^{\pi K}, a^*_{\vec{k}\alpha}] \tag{4}$$

and

$$T_{\sigma \vec{k}\tilde{\alpha}}(\lambda) = \langle \Phi^-_\lambda\, V_{\vec{k}\tilde{\alpha}}\, \Phi_\sigma \rangle, \qquad V_{\vec{k}\tilde{\alpha}} = [H^{BK} + H^{\pi K}, b^*_{\vec{k}\alpha}]\,. \tag{$\tilde{4}$}$$

By means of (2) and (3) we obtain

$$V_{\vec{k}\alpha} = \frac{v(k)}{\sqrt{2\omega_k}} \left[\frac{f^0_K}{\mu_K} i\vec{\sigma}\cdot\vec{k}\,(\xi C)_\alpha + \frac{\lambda^0_K}{M} \sum_{\vec{k}'} \frac{v(k')}{\sqrt{2\omega_{k'}}} (a^*_{\vec{k}'\alpha} + b_{-\vec{k}'\alpha}) \right] + \tag{5}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\, \lambda^0_{\pi K} \int d_3 x K^*_\alpha : \pi_j \pi_j : e^{i\vec{k}\vec{x}} = V^*_{-\vec{k}\tilde{\alpha}},$$

where

$$\varrho(|\vec{x}|) = \sum_{\vec{k}} v(k)\, e^{i\vec{k}\vec{\alpha}}, \qquad k = |\vec{k}|. \tag{6}$$

The scattering amplitudes satisfy Low's equations (12) and ($\tilde{12}$) of the first paper [1]. The Born term $T^B_{\sigma \vec{k}\alpha}(\sigma' \vec{k}' \alpha')$ is given by formula (14) of this paper. The Born term $T^B_{\sigma \vec{k}\tilde{\alpha}}(\sigma' \vec{k}' \tilde{\alpha}')$ has a similar form. In these formulae we have now

$$\langle \Phi_{\sigma'} | a_{\vec{k}'\alpha'}, V_{\vec{k}\alpha}] \Phi_\sigma \rangle = \frac{1}{\sqrt{4\omega_{k'}\omega_k}}\, \delta_{\sigma'\sigma}\, \delta_{\alpha'\alpha} \left[\lambda^0_K \frac{v(k')\, v(k)}{M} + \right. \tag{7}$$

$$\left. + \lambda^0_{\pi K} F(|\vec{k}' - \vec{k}|) \right] = \langle \Phi_{\sigma'} [b_{\vec{k}'\alpha'}, V_{\vec{k}\tilde{\alpha}}] \Phi_\sigma \rangle,$$

where

$$\int d_3 x \langle \Phi_{\sigma'} : \pi_j(\vec{x})\, \pi_j(\vec{x}) : \Phi_\sigma \rangle e^{-i(\vec{k}'-\vec{k})\vec{x}} = \delta_{\sigma'\sigma} F(|k' - k|), \tag{8}$$

and

$$(9)\qquad T_{\sigma\vec{k}\alpha}(\sigma')=\langle\Phi_{\sigma'}V_{\vec{k}\alpha}\Phi_{\sigma}\rangle=\frac{v(k)}{\sqrt{2\omega_k}}\frac{f_K^{\sigma'\sigma}}{\mu_K}i\vec{k}\cdot[\vec{\sigma}(\xi C)_\alpha]_{\sigma'\sigma}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\Bigg[\lambda_K^0\frac{v(k)}{M}\Big\langle\Phi'_\sigma\sum_{\vec{k}'}\frac{v(k')}{\sqrt{2\omega_{k'}}}(a^*_{\vec{k}'\alpha}+b_{\vec{k}'\alpha})\Phi_\sigma\Big\rangle+$$

$$+\lambda^0_{\pi K}\Big\langle\Phi_{\sigma'}\int d_3xK^*_\alpha:\pi_j\pi_j:e^{i\vec{k}\vec{x}}\Phi_\sigma\Big\rangle\Bigg]=\langle\Phi_{\sigma'}V^*_{\vec{k}\tilde{\alpha}}\Phi_\sigma\rangle=T^*_{\sigma'-\vec{k}\tilde{\alpha}}(\sigma).$$

Thus, if we consider the processes $N+K\to N+K$ and $N+K\to N+K$ and neglect in (9) the terms λ^0_K and $\lambda^0_{\pi K}$ compared to term $f_K^{\sigma'\sigma}$ we obtain for the Born amplitudes the formulae (15) and ($\widetilde{15}$) of the first paper [1] *plus* the term

$$(10)\qquad \frac{1}{\sqrt{4\omega_{k'}\omega_k}}\delta_{\sigma'\sigma}\delta_{\alpha'\alpha}\lambda^0_{\pi K}F(|\vec{k}'-\vec{k}|)$$

in both the cases. Let us remark that, if $kR\ll 1$, where R is an effective radius of the pion cloud of the nucleon, then $F(|\vec{k}'-\vec{k}|)\approx F(0)$.

Now, we can carry out the separation of the scattering amplitudes for $N+K\to N+K$ and $N+K\to N-K$ into the partial amplitudes, making use of the formulae

$$(11)\qquad T_{\sigma\vec{k}\alpha}(\sigma'\vec{k}'\alpha')_{k'=k}=$$

$$=-4\pi\frac{1}{2\omega_k}\sum_T P_T(\sigma'\alpha',\sigma\alpha)\Big[g_T(\omega_k)+v^2(k)\sum_J P_J(\sigma'\vec{k}',\sigma\vec{k})h_{JT}(\omega_k)+\cdots\Big]$$

and

$$(\widetilde{11})\qquad T_{\sigma\vec{k}\tilde{\alpha}}(\sigma'\vec{k}'\tilde{\alpha}')_{k'=k}=$$

$$=-4\pi\frac{1}{2\omega_k}\sum_T\widetilde{P}_T(\sigma'\alpha',\sigma\alpha)\Big[\widetilde{g}_T(\omega_k)+v^2(k)\sum_J P_J(\sigma'\vec{k}',\sigma\vec{k})\widetilde{h}_{JT}(\omega_k)+\cdots\Big],$$

where the projection operators are given by (2), (3) and (4) of the second paper [1].

The partial amplitudes g's, h's and $\widetilde{g}$'s, $\widetilde{h}$'s satisfy (if $kR\ll 1$) the dispersion relations (7) and ($\widetilde{7}$) of the second paper [1], but without factors $1/v^2(k')$ in the case of g's and $\widetilde{g}$'s. The S-wave Born terms g^B_T and $\widetilde{g}^B_T$ are given now by formulae

$$(12)\qquad g^B_T(\omega_k)=-\frac{\lambda^0_K\dfrac{v^2(k)}{M}+\lambda^0_{\pi K}F(0)}{4\pi}=\widetilde{g}^B_T(\omega_k)\qquad(\text{if } kR\ll 1).$$

The P wave Born terms h^B_{JT} and $\widetilde{h}^B_{JT}$ have the forms (8) and ($\widetilde{8}$) of the second paper [1].

The S wave Born cross-sections have the forms

$$\sigma_T^S(\omega)^B = \frac{[\lambda_K^0 \frac{1}{M} + \lambda_{\pi K}^0 F(0)]^2}{4\pi} = \tilde{\sigma}_T^S(\omega)^B \qquad (\text{if } kR \ll 1). \tag{13}$$

They are constant at low energies.

INSTITUTE OF THEORETICAL PHYSICS, WARSAW UNIVERSITY
(INSTYTUT FIZYKI TEORETYCZNEJ, UNIWERSYTET WARSZAWSKI)
INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
(INSTYTUT BADAŃ JĄDROWYCH, PAN)

REFERENCES

[1] W. Królikowski, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys., **7** (1959), 237; ibid. **7** (1959), 691.
[2] — ibid., **7** (1959), 695.
[3] — Nuclear Physics, **8** (1958), 461.
[4] G. Białkowski and A. Jurewicz, Phys. Rev., in press.
[5] S. Barshay, Phys. Rev. **109** (1959), 2160.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys.—Vol. VIII, No. 1, 1960

THEORETICAL PHYSICS

On Wave Functions for the Problem of Electron and X-ray Scattering by Helium Atoms

by

W. KOŁOS

Presented by L. INFELD on November 26. 1959

The problem of the elastic scattering of electrons by helium atoms has been treated by several authors and, allowing for electron exchange and polarization, a fair agreement between theoretical and experimental results has been obtained (see e.g. [1], [5], [6]). In all these calculations for the two electrons of the helium atom very simple wave functions have been used, in particular the effect of electron correlation has been neglected. It is well known that wave functions of this type cannot give an accurate expectation value of an operator that depends explicitly on the interelectronic distance. Thus, e.g., the energy of a system calculated using a Hartree-Fock wave function is always higher by the correlation error than the correct eigen-value of the Hamiltonian. However, there is no assurance that the approximate wave function yielding the lowest energy is necessarily the best function for the calculation of another physical quantity under discussion [2], [4]. For example by taking partly into account the correlation of electrons and considerably improving the energy, we may get worse results for the total charge distribution and for those physical quantities that depend on the total charge distribution and not on the relative positions of the electrons. Of course, a very accurate wave function would give an accurate value of any quantity, however for many-electron systems such wave functions are practically unobtainable and rather drastic approximations have to be made.

In the present paper the differential cross-section of the helium atom for the scattering of electrons was calculated in the first Born approximation using two different types of wave functions. The purpose of this calculation was to make a preliminary study of the dependence of the cross-section on the approximate forms of the wave function and in particular on the correlation of the atomic electrons. Results obtained by employing the same wave functions to the problem of the X-ray scattering by helium atoms are also presented.

The differential cross-section of the helium atom for the scattering of electrons was calculated from the formulas [7]:

$$I(\theta)\,d\omega = |f(\theta)|^2\,d\omega, \tag{1}$$

$$f(\theta) = -\frac{2\pi m}{h^2}\int e^{ik(\boldsymbol{n}_0-\boldsymbol{n})r_3}\,V(r_3)\,d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_3, \tag{2}$$

where $k = 2\pi/\lambda$ $\boldsymbol{n}_0$ and $\boldsymbol{n}$ are the unit vectors in the direction of the incident and scattered electrons respectively, and the potential $V(r_3)$ is given by

$$V(r_3) = e^2\int\left(\frac{1}{r_{13}}+\frac{1}{r_{23}}-\frac{2}{r_3}\right)|\Psi(r_1,r_2)|^2\,d\tau_1\,d\tau_2, \tag{3}$$

where r_{ij} denotes the distance between the electrons i and j, and r_k is the distance between the electron k and the nucleus.

From (2) we obtain

$$f(\theta) = \frac{16\pi^2 me^2}{h^2 K^2}\,[1-F(\theta)], \tag{4}$$

where $\boldsymbol{K} = k(\boldsymbol{n}_0-\boldsymbol{n}) = 4\pi\sin\frac{1}{2}\theta/\lambda$, and $F(\theta)$, known as atomic scattering factor, is given by

$$F(\theta) = \int e^{iKr_1\cos\alpha_1}\,|\Psi(r_1,r_2)|^2\,d\tau_1\,d\tau_2. \tag{5}$$

To get Eq. (5), the spherical polar co-ordinate system was chosen with the axis $\alpha = 0$ in the direction of the vector $\boldsymbol{n}_0-\boldsymbol{n}$.

The intensity of X-rays scattered by an atom can be obtained from the formula

$$I_X(\theta)\,d\omega = \left[\frac{e^2}{mc^2}F(\theta)\right]^2(1+\cos^2\theta)\,d\omega. \tag{6}$$

To calculate $F(\theta)$, the wave function [3] in the form

$$\Psi(r_1,r_2) = N\,e^{-\frac{a}{2}(r_1+r_2)}(1+cr_{12}) \tag{7}$$

was employed, in which a and c are parameters, and N is the normalizing factor. With this wave function the problem is reduced to the calculation of the following integrals

$$B_n = \int \exp\left[iKr_1\cos\alpha_1 - a(r_1+r_2)\right] r_{12}^n\,d\tau_1\,d\tau_2\,. \tag{8}$$

The B_n integrals, for $n = 0, 2$, can be easily evaluated in terms of

$$A_m = \int e^{-ar}\,r^m\sin Kr\,dr. \tag{9}$$

For $n = 1$ we expand $1/r_{12}$ in spherical polar co-ordinates and integrating over the angles we get the same A_m integrals as for even n.

Numerical calculations were made for 50-volt electrons and for three different values of parameters in the wave function (7):

1° $c = 0$ and $a = 3.375$ which minimizes the energy of the helium atom for $c = 0$,

2° $a = 3.375$, i.e. the same as in (1), $c = 0.204$ which minimizes the energy for $a = 3.375$,

3° $a = 3.7016$, $c = 0.3702$; in this case both parameters have optimum values for the energy.

The numerical results for $I'(\theta) = I(\theta) h^4/64\pi^4 m^2 e^4$ and for $I'_X(\theta) = I_X(\theta) m^2 c^4 e^4$ in the Table are given, which also includes the energies of the helium atom calculated with the three wave functions.

TABLE

a	3.375	3.375	3.7016
c	0	0.204	0.3702
$-E$ (*au*)	−2.8477	−2.8749	−2.8910
$I'(2^\circ)$	0.1232	0.1654	0.1285
$I'(10^\circ)$	0.1198	0.1591	0.1251
$I'(30^\circ)$	0.0963	0.1241	0.1000
$I'(90^\circ)$	0.0294	0.0331	0.0298
$I'(150^\circ)$	0.01340	0.01432	0.01344
$I'_X(2^\circ)$	7.9823	7.9803	7.9820
$I'_X(10^\circ)$	7.5777	7.5322	7.5711
$I'_X(30^\circ)$	5.0230	4.7812	4.9886
$I'_X(90^\circ)$	0.5455	0.4384	0.5342
$I'_X(150^\circ)$	0.2119	0.1643	0.2099

It is seen that the results obtained in case 3° are very close to those obtained in case 1°. For the electron scattering there is only a small increase of intensity at small angles, and practically no difference for the X-ray scattering. It seems, therefore, that the electron correlation does not have any significant influence on the electron or X-ray scattering, although the result might be different for low energies of the incident electrons for which Born's approximation breaks down. However, in case 2°, in which the energy of the helium atom has an intermediate value, the scattered intensities are very different from those obtained in the two other cases, especially for the scattering of electrons. These results are probably less reliable because the wave function employed in this case is not properly scaled, however they show clearly that the energy criterion is not a useful guide when choosing an approximate wave function for the calculation of other physical quantities.

LABORATORY OF RADIATON CHEMISTRY, INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
(PRACOWNIA CHEMII RADIACYJNEJ, INSTYTUT BADAŃ JĄDROWYCH PAN)

REFERENCES

[1] W. P. Allis and P. M. Morse, Phys. Rev., **44** (1933), 269.

[2] C. Carter, N. H. March and D. Vincent, Proc. Phys. Soc., 71 (1958), 2.

[3] E. A. Hylleraas, Z. Physik, **48** (1928), 469.

[4] W. Kołos and C. C. J. Roothaan, Rev. Mod. Phys., (in press).

[5] H. S. W. Massey and C. B. O. Mohr, Proc. Roy. Soc., A **146** (1934), 880.

[6] B. L. Moiseiwitsch, Proc. Roy. Soc., A **219** (1953), 102.

[7] N. F. Mott and H. S. W. Masey, *The theory of atomic collisions*, Oxford, 1949.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys.—Vol. VIII, No. 1, 1960

PHYSIQUE EXPÉRIMENTALE

Variation en fonction de la pression de la durée de vie des porteurs libres minoritaires dans le germanium

par

ARSÈNE SORLIN

Présenté par A. SOŁTAN le 23 novembre 1959

Une étude de la durée de vie considerée en fonction de la pression peut apporter des constatations nouvelles à la notion tendant à expliquer les phénomènes se manifestant à l'intérieur des semi-conducteurs. Etant données les conditions du travail, nous ne pouvons utiliser ici que des méthodes électriques.

1. Mise au point

A) Obtention des hautes pressions

Nous avons employé l'appareil de Verestchagin [1]. Nous obtenons une forte pression hydrostatique (6000 at) en comprimant un liquide (glycérine ou térébenthine), contenu dans une matrice d'acier, par un piston conique

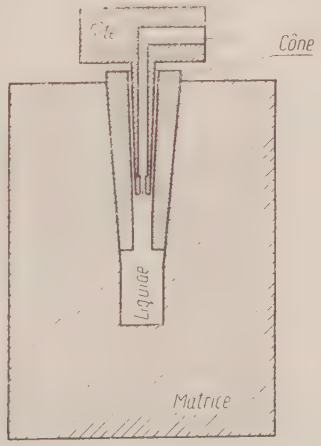


Fig. 1

d'acier plus tendre (Fig. 1). Les parois en présence exercent l'une sur l'autre une pression P_l qui s'oppose à la pression interne P et assure l'autoétanchéité.

Nous mesurons la pression P par la méthode de Bridgman [2], en observant à l'aide d'un pont de Wheaststone la variation de résistance d'un fil de manganine. Nous étalonnons ce fil en repérant le point de fusion du gallium.

B) Méthodes de mesure de τ

Méthode de Lederhandler et Giacoletto [3]. Nous réalisons le montage suivant comportant une diode au germanium ou une triode considérée comme jonction simple que nous introduisons dans la matrice (Fig. 2).

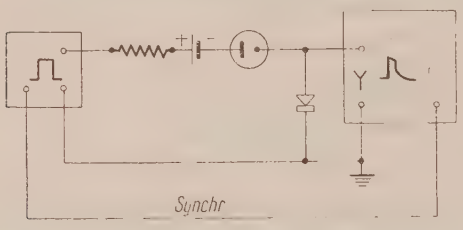


Fig. 2

L'oscilloscope nous donne l'image de la décroissance en fonction du temps de la F. E. M. crée dans la jonction N—P après l'injection des porteurs minoritaires. Cette décroissance est à-peu-près linéaire.

La pente de l'image obtenue à l'oscilloscope est inversement proportionnelle à la durée de vie. Il s'agit d'observer la variation de cette pente en fonction de la pression, et, nous verrons plus loin pourquoi, de la température.

Cette méthode s'avère néanmoins trop peu précise et il sera nécessaire de faire appel à une méthode différentielle.

Méthode differentielle [4]. Cette methode utilise le fait que la base I_b d'un transistor monté base à la masse est la mesure du nombre de porteurs se recombinant dans la base pendant l'unité de temps.

Si nous négligeons la recombination superficielle, nous arrivons pour le courant de base à [5]:

$$I_b = \frac{W^2}{2D\tau} I_e, \tag{1.1}$$

où W — largeur de la base,

D — constante de diffusion des porteurs minoritaires,

I_e — courant de l'émetteur (dans notre expériment I^e est constant),

D'autre part, $D = \frac{kT}{e}\mu$ et Paul et Brooks ont montré [6] que la mobilité variait trés peu avec la pression. Par conséquent, nous pouvons écrire au lieu de (1.1)

$$\frac{\Delta I_b}{I_b} = 2\frac{\Delta W}{W} - \frac{\Delta \tau}{\tau}, \tag{1.2}$$

où ΔI_b, ΔW, $\Delta \tau$ — les variations de paramètres sous la pression P.

En substituant la variation en épaisseur pour la variation en volume nous obtenons avec une approximation suffisante pour la variation relative la formule suivante:

$$\frac{\Delta \tau}{\tau} = -2\xi P - \frac{\Delta I_b}{I_b}, \tag{1.3}$$

où ξ est le coefficient de la compressibilité du volume du germanium. Il nous suffira de lire les changements du courant base en fonction de P. Mais le courant I_b est faible, ses variations le seront d'autant, aussi M. T. Figielski de l'Institut de Physique de l'Académie Polonaise des Sciences a-t-il proposé de mesurer I_b par la méthode comparative suivant le schéma donné sur Fig. 3.

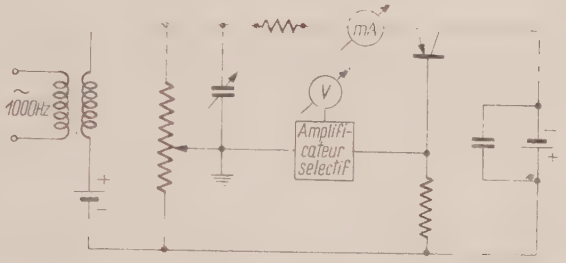


Fig. 3

Nous équilibrons de manière à avoir $V = 0$ et nous lisons l'éloignement $\Delta V \sim I_b$ de la position d'équilibre quand le transistor est soumis à la pression.

C) Echantillons:

Nous avons utilisé des diodes et des transistors *TG* et *OC* 70 au germanium du type *n*. Nous les avons décapsulé et plongé dans le liquide contenu dans la matrice, après les avoir reliés aux fils de conduction qui traversent la tête de la matrice.

2. Théorie

La recombination des électrons et des trous dans le germanium se réalise par intermédiaire de centres de recombination. Nous supposons, que nos échantillons du germanium sont d'un type de centres de recombination des niveaux énergétiques E_t et dans ce cas la statistique de Read-Shockley [7] peut être appliquée.

Pour des niveaux énergétiques E_t proches de la bande de valence, la statistique de Shockley et Read conduit à l'expression suivante de la durée de vie des trous dans un matériau de type *n*:

$$\tau_p = A + B \exp\left(-\frac{E_a}{kT}\right), \tag{2.1}$$

où $E_a = E_t - E_v$ = énergie d'activation des centres recombinateurs,
A, B = coefficients qui, nous le supposons, changent peu avec P et T.

Supposons maintenant que E_a reste proportionnel à E_g quand la pression varie:

$$E_a = a E_g. \tag{2.2}$$

Si nous désignons par $(\partial\tau/\tau)_\tau$ la variation relative de τ en fonction de la pression à température constante, par $(\partial\tau/\tau)_P$ la variation en fonction de la température à pression constante, nous obtenons l'expression suivante (basée sur les équations (2.1) et 2.2)):

$$\left(\frac{\partial\tau}{\tau}\right)_T = -\left(\frac{\partial\tau}{\tau}\right)_P \frac{\Delta P}{E_g}\frac{T}{\Delta T}\varkappa, \tag{2.3}$$

où $\varkappa = (\partial E_g/\partial P)\,T$ dont la valeur est bien connue [5]. En mesurant les variations de τ avec la température, nous pouvons en déduire le changement relatif de τ en fonction de la pression.

3. Résultats

Les deux méthodes ont démontré également que la durée de vie de porteurs minoritaires diminue avec l'augmentation de la pression. La Figure 4 done l'allure de la variation typique de τ en fonction de la pression.

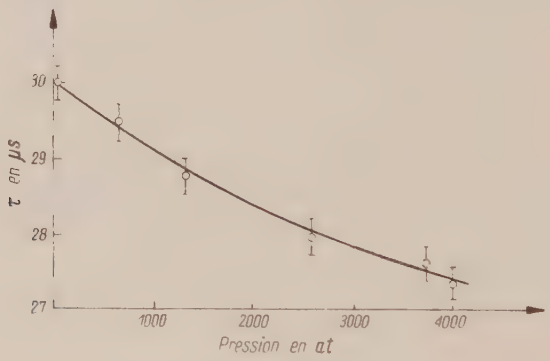


Fig. 4

La Tableau nous donne les variations relatives pour quelques échantillons.

TABLEAU

Echantillon	$-\left(\frac{\Delta\tau}{\tau}\right)_T$ pour 4000 et en %			pression atteinte (at)	remarques
	1e méth.	2e méth.	calculé		
diode DZG	8	—	9,5	5000	
trans. OC — 72 No 1	—	12	11	6000	
trans. OC — 72 No 2	7	10	11	4600	
transistor TG, No 3	10	18	10.4	4400	ether
transistor TG, No 3	10	9	10.4	4000	térebenth.

Etant donnée la précision de nos mesures, nous constatons une bonne concordance des résultats donnés par les deux méthodes de mesure, et par le calcul en partant de la variation avec T.

4. Conclusion

Nous constatons donc que la durée de vie des porteurs libres minoritaires dans le germanium diminue quand la pression augmente. Nous avons verifié qu'il est possible d'expliquer cette variation par la théorie de Shockley et Read, en supposant que l'énergie d'activation E_a des centres recombinateurs varie proportionnellement à E_g, largeur de bande interdite.

Je tiens à remercier M. le Professeur L. Sosnowski, Directeur de l'Institut de Physique de l'Académie Polonaise des Sciences, qui m'a accordé toutes les facilités de travail dans son laboratoire, et M. le Docteur T. Figielski qui a dirigé ce travail.

Le présent travail a été executé à l'Institut de Physique de L'Academie Polonaise des Sciences pendant le stage de l'auteur dans le cadre de l'echange des chercheurs entre le Centre National des Recherches Scientifiques et l'Académie Polonaise des Sciences.

INSTITUT DE PHYSIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
(INSTYTUT FIZYKI, PAN)

OUVRAGES CITÉS

[1] L. E. Verestchagin, A. T. Lichter, W. T. Ivanoff, Zh. techn. fiz., **26** (1956), 874.

[2] P. W. Bridgman, *The physics of high pressures*, G. Bell a Sons Ltd., London, 1946.

[3] S. R. Lederhandler, L. T. Giagoletto, Proc. Inst. Radio Engrs., **43** (1955), 477.

[4] T. Figielski, communication personelle.

[5] Goudet, Menleau, *Les semi-conducteurs,*

[6] W. Paul, H. Brooks, Phys. Rev., **94** (1954), 1128.

[7] W. Shockley, W. Read, Phys. Rev., **87** (1955), 835.

БЮЛЛЕТЕНЬ
ПОЛЬСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ, АСТРОНОМИЧЕСКИХ
И ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

1960

ТОМ VIII Резюме статей ВЫПУСК 1

М. КРУЛЬ И Э. СОНСЯДА,

ПОЛНЫЕ ПРЯМЫЕ СУММЫ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ РАНГА 1, КОТОРЫЕ ЯВЛЯЮТСЯ СЕПАРАБЕЛЬНЫМИ

стр. 1—2

Абелева группа без кручения G называется сепарабельной, если всякое конечное множество элементов группы G содержится во вполне разложимом прямом слагаемом этой группы.

Пусть $G = \sum_{t \in T}^{*} R_t$ будет полной прямой суммой групп $R_t (t \in T)$ ранга 1, и $\Omega(G)$ множеством всех различных типов $\tau(R_t)$ слагаемых $R_t (t \in T)$. Через $T_{\mathfrak{a}} (\mathfrak{a} \in \Omega(G))$ обозначаем подмножество всех тех $t \in T$, для которых $\tau(R_t) = \mathfrak{a}$. Множества $\Omega(G)$ и $T_{\mathfrak{a}} (\mathfrak{a} \in \Omega(G))$ суть инварианты группы G.

Пусть $\Omega_{(0,\infty)}(G)$ будет множеством всех тех типов, принадлежащих к $\Omega(G)$, которые определяются характеристиками лишь с элементами 0 и ∞ и пусть $\Omega_*(G) = \Omega(G) \setminus \Omega_{(0,\infty)}(G)$.

Предполагается следующая

Теорема. *Полная прямая сумма* $G = \sum_{t \in T}^{*} R_t$ *групп* $R_t (t \in T)$ *ранга* 1 *есть сепарабельная тогда и только тогда, когда инварианты* $\Omega(G)$ *и* $T_{\mathfrak{a}}(G)$ $(\mathfrak{a} \in \Omega(G))$ *удовлетворяют следующим условиям:*

(1) *для всякого подмножества* $\Omega' \subset \Omega(G)$ *и всякого выбора характеристик* $\chi_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} \in \Omega')$ *существует конечное подмножество* $\Omega'' \subset \Omega'$ *такое, что*

$$\bigcap_{\mathfrak{a} \in \Omega'} \chi_{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{a} \in \Omega''} \chi_{\mathfrak{a}},$$

(2) *для всякого* $\mathfrak{a} \in \Omega_*(G)$ *множество* $T_{\mathfrak{a}}(G)$ — *конечно.*

К. МОРЕН, **ЗАМЕЧАНИЯ О СПЕКТРЕ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ ЛЕВО ИНВАРИАНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ГРУППАХ Ли** . . . . . стр. 3—9

Пусть G — сепарабельная связная группа Ли; $Y_1, \ldots, Y_N$ — лево инвариантные операторы Ли на G, $P = P(Y_1, \ldots, Y_N)$.

В работе доказывается, что:

1° почти все (относительно некоторой меры) собственные функции оператора $\overline{P} = \overline{P}^*$, где $\overline{P}$ является замыканием оператора P (определенного на пространстве Гординга регулярного представления группы G), аналитические и слабо ограниченные на G.

2° операторы P обладают на прекомпактных областях $\Omega \subset G$ исключительно точечным спектром.

Вывод. Для операторов Лапласа на группе Ли G справедливы утверждения 1° и 2°.

И. СЛОМИНЬСКИЙ, **О ПОГРУЖЕНИИ АБСТРАКТНЫХ КВАЗИ-АЛГЕБР В ТОЖДЕСТВЕННО ОПРЕДЕЛИМЫЕ КЛАССЫ АБСТРАКТНЫХ АЛГЕБР** стр. 11—17

Квази-алгеброй типа $\Delta = \langle k_1, \ldots, k_\xi, \ldots \rangle_{\xi<\alpha}$ является каждая последовательность $\boldsymbol{A} = \langle A, (f_1, A_1), \ldots, (f_\xi, A_\xi), \ldots \rangle_{\xi<\alpha}$ такая, что A является не-пустым множеством, $A_\xi \subset A$, а также f_ξ является k_ξ-аргументной функцией определенной на A_ξ со значениями из A.

Пусть $\boldsymbol{B} = \langle B, f'_1, \ldots, f'_\xi, \ldots \rangle_{\xi<\alpha}$ будет произвольной алгеброй типа Δ. Функцию $h(A) \subset B$ называем гомоморфизмом $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{B}$, если для каждого $\xi < \alpha$ и произвольных $a_1, a_2, \ldots, a_{k_\xi} \in A_\xi$ имеется $h(f_\xi(a_1, a_2, \ldots, a_{k_\xi})) = f'_\xi(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_{k_\xi}))$. Если, кроме того, $h(A)$ порождает $\boldsymbol{B}$, то h является гомоморфизмом $\boldsymbol{A}$ почти на $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{B}$ называем почти гомоморфным образом квази-алгебры $\boldsymbol{A}$.

В работе дается теория гомоморфизмов фиксированной квази-алгебры $\boldsymbol{A}$ в алгебры $\boldsymbol{B} \in \mathfrak{V}$, где $\mathfrak{V}$ является произвольным тождественно определимым классом алгебр.

Пусть $\boldsymbol{W} = \langle W, F_1, \ldots, F_\xi, \ldots \rangle_{\xi<\alpha}$ будет $\mathfrak{V}$-свободной алгеброй, свободно порождаемой через A, а $\sim_0$ самой малой конгруэнтностью алгебры $\boldsymbol{W}$ такой, что для каждого $\xi < \alpha$, а также произвольных $a_1, a_2, \ldots, a_{k_\xi}$, принадлежащих к A_ξ, $f_\xi(a_1, a_2, \ldots, a_{k_\xi}) \sim_0 F_\xi(a_1, a_2, \ldots, a_{k_\xi})$. Конгруэнтности $\sim$ алгебры $\boldsymbol{W}$ такие, что $\sim_0 \leqslant \sim$ называем $\mathfrak{V}$-регуляризаторами квази-алгебры $\boldsymbol{A}$. Алгебра $\boldsymbol{B} \in \mathfrak{V}$ является почти гомоморфным образом квази-алгебры $\boldsymbol{A}$ тогда и только тогда, когда она изоморфна с алгеброй $\boldsymbol{W}/\sim$, где $\sim$ является некоторым $\mathfrak{V}$-регуляризатором квази-алгебры $\boldsymbol{A}$. Квази-алгебру $\boldsymbol{A}$ можно изоморфно погрузить в некоторую алгебру $\boldsymbol{B} \in \mathfrak{V}$ тогда и только тогда, когда для всех $a, b \in A$ условие $a \sim_0 b$ влечет за собой $a = b$.

М. БЕРНАЦКИЙ, **О ТЕОРЕМЕ КОШИ-ГУРСАТА** . . . . . стр. 25—28

Гурсат был первым, который доказал следующую теорему: *Если функция $f(z)$ комплексной переменной z имеет конечную производную во всех точках произвольной области, то эта производная является непрерывной в этой области.*

Автор приводит элементарное доказательство этой теоремы, не прибегая ни к интегралам, ни к более сложным топологическим понятиям.

М. БЕРНАЦКИЙ, **ОБ ИНТЕГРАЛАХ ОДНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ**
стр. 29—34

Автор доказывает следующую теорему: *Если* $f(z) = a_1 z + \ldots$ — *голоморфная и однозначная функция в круге* $|z| < R$, *то функция*

$$g(z) = \int_0^z \frac{f(z)}{z}\, dz$$

тоже однозначна в этом круге.

Этот результат обобщает известную ранее теорему, в которой говорится, что если $f(z)$ — функция голоморфная и однозначная относительно начала системы координат, то $g(z)$ является выпуклой функцией.

К. ФОЙАС, **НЕ-СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ НЕНУЛЕВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА ПРОСТРАНСТВЕ ОПЕРАТОРОВ Я. МИКУСИНСКОГО** . . . . . стр. 35—37

Пусть $\mathfrak{M}_0$ — кольцо непрерывных функций на интервале $[0, \infty]$ со сверткой как умножением. Пусть $\mathfrak{M}$ поле формальных дробей. Топология в $\mathfrak{M}$ определена аналогично, как в работе [3]. Автор доказывает, что каждый линейный функционал, непрерывный в $\mathfrak{M}$, тождественно равен нулю.

С. ТАРКОВСКИЙ, **О НЕСРАВНИМОСТИ ДЕНДРИТОВ** . . . стр. 39—41

В работе приводится теорема, являющаяся решением проблемы поставленной независимо друг от друга Борсуком, Кнастером и Эрдешом. В силу следствия из этой теоремы — всякое множество несравнимых дендритов, т. е. таких, что ни один из них не содержит гомеоморфного образа другого — конечно.

Доказательства будут опубликованы в *Fundamenta Mathematicae*.

Т. ВАЖЕВСКИЙ, **ОБ ОБОБЩЕНИИ МЕТОДА И. ЮНГЕРМАНН ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СХОДИМОСТИ РЯДА ОЧЕРЕДНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В СЛУЧАЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ** . . . стр. 43—46

Автор приводит не опубликованное до настоящего времени доказательство теоремы И. Юнгерманн (представленное автору настоящей работы в 1937 г.) и указывает на возможность распространения теоремы на случай дифференциальных уравнений, рассматриваемых в полном банаховом пространстве с однородной нормой.

Т. ВАЖЕВСКИЙ, **НЕКОТОРЫЙ МЕТОД ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОЧЕРЕДНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ БЕЗ СОПОСТАВЛЕНИЯ С ВСПОМОГАТЕЛЬНЫМИ РЯДАМИ** . . . . . стр. 47—52

Автор приводит некоторые теоремы о сходимости метода очередных приближений без сопоставления с вспомогательными рядами. Эти теоремы представляют собой обобщение теорем Банаха, Каччионелли и Тихонова, а также теорем Канторовича, Мышкиса и Эгли. Автор использует при том некоторые результаты, полученные И. Юнгерманн и ранее полученные собственные результаты.

В. ПОГОЖЕЛЬСКИЙ, **О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ИНТЕГРАЛОВ АНАЛОГИЧНЫХ ПОТЕНЦИАЛАМ И О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ** . . . . . стр. 53—57

Автор исследует некоторые свойства обобщенных потенциалов, относительно параболического уравнения (1), с неограниченной полностью. Теорема 1 дает оценку (8) производных (7) потенциала простого слоя. Теорема 2 дает предельные свойства (11) и оценки (12) потенциала (10) объемного заряда с неограниченной плотностью, удовлетворяющей неравенству (9). Теоремы 3 и 4 касаются условий Гельдера (13), (14), (15), выполненных потенциалом объемного заряда и его производными. Теорема 5 касается свойств обобщенного интеграла Пуассона-Вейерштрасса (17) с неограниченной функцией (16). Эти свойства выражены неравенствами Гельдера (19), (20), (21).

В последней части своей работы автор применяет вышеупомянутые свойства к решению краевой задачи для параболического уравнения (1). Эта задача состоит в определении решения уравнения (1), которое выполняет краевое условие (22) с трансверсальной производной и начальное условие (23). Автор решает задачу топологическим методом Шаудера, принимая более общие предположения (4), (5), (24), (25) для заданных функций F, G, f.

Я. МИКА и Р. ЖЕЛЯЗНЫ, **ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АПРОКСИМАЦИЯ В ТЕОРИИ ТРАНСПОРТА НЕЙТРОНОВ** . . . . . стр. 59—62

Дается формулировка проблемы применения общих ортогональных полиномов для односкоростного уравнения Больцманна в теории транспорта нейтронов. Приводятся общие рассуждения, касающиеся применения полиномов Якоби и Гегенбауера для этой цели, а также дается определение произвольного параметра для полиномов Гегенбауера в некотором особом случае.

В. КРУЛИКОВСКИЙ, **РАССЕИВАНИЕ МЕЗОНОВ K ПРИ СОПРЯЖЕНИИ $\bar{K}K\pi\pi$ В ТЕОРИИ ЖЕСТКОГО ИСТОЧНИКА** . . . . . стр. 63—66

В работе указывается на возможность большой роли сопряжения $\bar{K}K\pi\pi$ в явлении рассеивания мезонов K на нуклеонах при низких энергиях.

В. КОЛОС, **О ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЯХ ДЛЯ ПРОБЛЕМЫ РАССЕИВАНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ И РЕНТГЕНОВСКИХ ЛУЧЕЙ АТОМАМИ ГЕЛИЯ** . стр. 67—70

Дифференциальное эффективное сечение атомов гелия на рассеивание электронов было вычислено в приближении Борна, применяя для атомных электронов волновые функции, зависящие explicite от взаимной отдаленности электронов.

Констатировано, что в пределе применяемости приближения Борна корреляционный эффект не большой и выступает главным образом при малых углах рассеяния. Автор, однако, пришел к убеждению, что энергический критерий не пригоден к оценке практической применимости волновых функций в проблемах рассеивания. Результаты полученные для рассеивания рентгеновских лучей приводят к аналогичным заключениям.

А. СОРЛЕН, **ИЗМЕНЕНИЕ ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ НЕОСНОВНЫХ НОСИТЕЛЕЙ ТОКА В ГЕРМАНИИ ПРИ ВЫСОКОМ ДАВЛЕНИИ** . . . . . стр. 71—75

На германиевых диодах и триодах исследовано изменение времени жизни носителей тока в зависимости от давления. Обнаружено уменьшение τ, достигающее в прибл. 10% при 5000 *ат*.

Показано, что эффект можно объяснить на основе статистики Рида-Шоклея, предполагая, что изменение энергии ионизации ловушек при давлении пропорционально изменению ширины запрещенной зоны.

TABLE DES MATIÈRES

Mathématique

1. M. Król and E. Sąsiada, The Complete Direct Sums of Torsion-free Abelian Groups of Rank 1 which Are Separable 1
2. K. Maurin, Bemerkungen über das Spektrum und Eigenfunktionen (links) invarianter Differentialoperation auf Lieschen Gruppen 3
3. J. Słomiński, On the Embedding of Abstract Quasi Algebras into Equationally Definable Classes of Abstract Algebras 11
4. Б. В. Боярский, О задаче Дирихле для системы уравнений эллиптического типа в пространстве 19
5. M. Biernacki, Sur le théorème de Cauchy-Goursat 25
6. M. Biernacki, Sur l'intégrale des fonctions univalentes 29
7. Ciprian Foias, La non-existence des fonctionnelles linéaires continues non-nulles sur l'espace des opérateurs de J. Mikusiński 35
8. S. Tarkowski, On the Comparability of Dendrites 39
9. T. Ważewski, Sur une extension du procédé de I. Jungermann pour établir la convergence des approximations successives au cas des équations différentielles ordinaires 43
10. T. Ważewski, Sur un procédé de prouver la convergence des approximations successives sans utilisation des séries de comparaison . . . 47
11. W. Pogorzelski, Sur certaines propriétés des intégrales analogues aux potentiels et un problème aux limites pour l'équation parabolique . 53

Physique Théorique

12. J. Mika and R. Żelazny, Polynomial Approximation in Neutron Transport Theory 59
13. W. Królikowski, Scattering of Kaons with $KK\pi\pi$ Coupling in the Fixed-Source Theory 63
14. W. Kołos, On Wave Functions for the Problem of Electron and X-ray Scattering by Helium Atoms 67

Physique Expérimentale

15. Arsene Sorlin, Variation en fonction de la pression de la durée de vie des porteurs libres minoritaires dans le germanium 71

Cena zł 20.—